

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Curso de Licenciatura em Matemática

Raquel Guedes da Silva

# Métodos Para Resolver Inequações Que Envolvem Funções Elementares

Abril/2020  
João Pessoa - PB

---

# **Métodos Para Resolver Inequações Que Envolvem Funções Elementares**

**por**

**Raquel Guedes da Silva**

**sob a orientação do**

**Prof. Ms. Gilmar Otávio Correia**

Trabalho de Conclusão de  
Curso apresentado ao departamento de  
Matemática da Universidade Federal  
da Paraíba, como parte integrante dos  
requisitos necessários para obtenção do  
título de Licenciada em Matemática.

**Abril/2020**  
**João Pessoa - PB**

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

S586m Silva, Raquel Guedes.

Métodos para resolver inequações que envolvem funções  
elementares / Raquel Guedes Silva. - João Pessoa, 2020.  
51 f. : il.

Orientação: Gilmar Otávio Correia.  
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Inequações. 2. Funções elementares. I. Correia,  
Gilmar Otávio. II. Título.

UFPB/BC

**Métodos Para Resolver Inequações Que Envolvem Funções Elementares**  
por  
**Raquel Guedes da Silva**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

**Aprovada por:**

---

**Prof. Gilmar Otávio Correia-UFPB (Orientador)**

---

**Prof. Antônio Sales da Silva-UFPB**

---

**Prof. Valdenilza Ferreira da Silva - UFPB**

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Curso de Licenciatura em Matemática

17 de Abril de 2020



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

ATA Nº 9 / 2020 - CCEN-CGM (11.01.14.44)

Nº do Protocolo: 23074.026428/2020-46

João Pessoa-PB, 06 de Maio de 2020

AVALIAÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE  
CURSO DO CURSO DE MATEMÁTICA

Aluno(a): Raquel Guedes da Silva

Matrícula: 11503675

Data da Defesa: 17/04/2020

Modalidade: Licenciatura

Forma de Avaliação:

Título do Trabalho: MÉTODO PARA RESOLVER INDAGAÇÕES QUE ENVOLVEM FUNÇÕES ELEMENTARES

PROF GILMAR OTÁVIO CORREIA (Orientador)

Banca Examinadora: PROFA VALDENILZA FERREIRA DA SILVA

PROF. ANTÔNIO SALES DA SILVA

Nota do Trabalho 8,0

(Assinado digitalmente em 15/05/2020 11:32 )

GILMAR OTAVIO CORREIA  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
Matrícula: 335020

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufpb.br/documentos/>  
informando seu número: **9**, ano: **2020**, documento (espécie): **ATA**, data de emissão: **06/05/2020** e o  
código de verificação: **aa16367453**

[Menu Principal](#)

# Agradecimentos

- A Deus, só tenho a agradecer por tudo.
- À minha família por toda a compreensão e apoio.
- Ao meu Orientador e aos professores do Departamento de Matemática.
- Aos amigos e colegas de estudo por sempre estarmos nos ajudando da melhor forma possível.
- À UFPB pelo apoio financeiro, pois foi de grande importância durante toda minha caminhada na graduação.

*“No que se refere à ciência, a autoridade de milhares não vale o simples raciocínio de um único indivíduo” - Galileu Galilei.*

# Resumo

Neste trabalho, iremos abordar alguns métodos para resolver inequações que envolvem funções elementares. Os dois principais métodos que utilizaremos são: o conhecido “Método da Análise do Sinal das Funções”, e um método que se baseia numa propriedade válida para funções contínuas, definidas em intervalos, o qual denominaremos de “Lema da Permanência do Sinal”.

Apesar de parecer um tema comum, é, a meu ver, raramente abordado em trabalhos acadêmicos, principalmente, em relação a novas propostas para suas soluções.

Sendo assim, decidimos construir este trabalho da seguinte maneira, primeiro expondo todo suporte matemático necessário para nosso objeto de estudo, ou seja, os conjuntos numéricos básicos essenciais (Naturais, Inteiros, Racionais e Reais), bem como suas propriedades algébricas e relações de ordem. Mais especificamente, em relação ao conjunto dos números reais, precisaremos das definições de intervalos, da relação deste conjunto com a reta numérica, dos axiomas de ordem e suas consequências : as propriedades de desigualdades.

Para compreendermos como funciona as desigualdades, e conseqüentemente, trabalhar com as inequações, é essencial incorporar todos os conceitos e as propriedades de forma abrangente, pois é o que nos dá suporte para não cometermos erros.

Além disso, é importante para este estudo, conhecer as principais funções elementares, com seus respectivos domínios e imagens, e a obtenção de todas as suas raízes, o que será essencial na determinação dos conjuntos-solução das inequações a estas associadas.

Sucedendo todo este suporte necessário, chegamos ao capítulo 4: As Inequações. Após definí-las e exibir alguns exemplos, apresentamos os métodos para resolvê-las.

O Capítulo 4, foi dividido em duas seções: na seção 4.1 trabalhamos com o Método da Análise do Sinal, e na seção 4.2 apresentamos o Lema da Permanência do Sinal, e sua aplicação como método para a resolução de inequações. Este último é uma proposta inovadora como método para resolver inequações que envolvem as conhecidas funções elementares (polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, etc.).

**Palavras-Chave:** inequação; função; conjunto; solução; permanência; sinal.



# Abstract

In this work, we will address some methods to resolve inequalities involving elementary functions. The two main methods we will use are: the well-known “Method of Signal Analysis of Functions”, and a method based on a valid property for continuous functions, defined in intervals, which we will call “Theme of Signal Permanence”.

Although it seems to be a common theme, it is, in my opinion, rarely approached in academic works, mainly in relation to new proposals for its solutions.

Therefore, we decided to build this work in the following way, first exposing all the necessary mathematical support for our object of study, that is, the numerical sets essential basics (Natural, Whole, Rational and Real) as well as their algebraic properties and order relations. More specifically, in relation to the set of real numbers, we will need the definitions of intervals, the relationship of this set with the numerical straight line, the axioms of order and their consequences: the properties of inequalities.

In order to understand how inequalities work, and consequently to work with inequalities, it is essential to incorporate all concepts and properties in a comprehensive way, since this is what gives us support so as not to make mistakes.

Moreover, it is important for this study to know the main elementary functions, with their respective domains and images, and to obtain all their roots, which will be essential in determining the set-solutions of inequalities associated to them.

Succeeding all this necessary support, we come to chapter 4: The Inequations. After defining them and showing some examples, we present the methods to solve them.

Chapter 4 was divided into two sections: in section 4.1 we work with the Signal Analysis Method, and in section 4.2 we present the Signal Permanence Motto, and its application as a method for resolving inequalities. The latter is what is presented as new as a method for solving inequalities involving the known elementary functions (polynomial, rational, trigonometric, exponential, logarithmic, etc.).

**Keywords:** inequity; function; set; solution; permanence; signal.

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>A Noção de Conjunto</b>                 | <b>3</b>  |
| 1.1      | O Conjunto dos Números Naturais . . . . .  | 4         |
| 1.2      | O Conjunto dos Números Inteiros . . . . .  | 5         |
| 1.3      | O Conjunto dos Números Racionais . . . . . | 6         |
| <b>2</b> | <b>O Conjunto dos Números Reais</b>        | <b>10</b> |
| 2.1      | Desigualdades . . . . .                    | 11        |
| 2.2      | Os Intervalos Reais . . . . .              | 13        |
| 2.3      | O Valor Absoluto . . . . .                 | 14        |
| <b>3</b> | <b>As Funções</b>                          | <b>15</b> |
| 3.1      | Função Afim . . . . .                      | 17        |
| 3.1.1    | Função Modular . . . . .                   | 18        |
| 3.2      | Função Quadrática . . . . .                | 19        |
| 3.3      | Funções Polinomiais . . . . .              | 21        |
| 3.3.1    | O Dispositivo de Briott-Ruffini . . . . .  | 23        |
| 3.3.2    | Teorema das Raízes Racionais . . . . .     | 25        |
| 3.4      | Função Exponencial . . . . .               | 27        |
| 3.5      | Função Logarítmica . . . . .               | 28        |
| 3.6      | Funções Trigonométricas . . . . .          | 30        |
| 3.6.1    | A Função Seno . . . . .                    | 30        |
| 3.6.2    | A Função Cosseno . . . . .                 | 31        |
| 3.6.3    | Relações Trigonométricas . . . . .         | 32        |
| <b>4</b> | <b>As Inequações</b>                       | <b>34</b> |
| 4.1      | O Método da Análise do Sinal . . . . .     | 37        |
| 4.2      | O Lema da Permanência do Sinal . . . . .   | 43        |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>          | <b>48</b> |
| <b>A</b> | <b>O Conjunto dos Números Complexos</b>    | <b>49</b> |
| A.1      | Teorema Fundamental da Álgebra . . . . .   | 51        |

# Introdução

Muitas pessoas acreditam que uma inequação, devido a sua nomenclatura, é o contrário de uma equação, que é uma sentença definida por uma igualdade. É evidente que isto não é tão simples assim, porém deve existir algo verdadeiro nesta afirmação.

Em uma inequação é utilizada uma linguagem similar aquela que é usada em uma equação, em relação a membro, termo, incógnita e solução, porém é uma sentença aberta representada por uma desigualdade que possui pelo menos uma incógnita, e muitas possíveis soluções. Resolvê-la é encontrar o seu conjunto-solução.

O conjunto-solução de uma inequação é o conjunto  $S$  de números reais que satisfazem a desigualdade em cada caso. Para achar tal conjunto é essencial conhecer as funções e as propriedades das desigualdades. Podemos resolvê-la operando apenas com estas propriedades, aplicadas a funções. Entretanto, existem métodos práticos para isto.

Entre as diversas aplicações para estudo de sinais de funções, destacam-se os processos de solução de inequações. Estas desigualdades podem ser analisadas a partir da análise das variações de sinal de funções.

O objetivo deste trabalho é abordar os métodos para determinar estas soluções, pois apesar da importância e das diversas aplicações, este tema é pouco abordado em trabalhos acadêmicos.

O Método da Análise do Sinal é bastante conhecido, devido a sua disseminação em vários livros em níveis fundamental e médio. Porém, o Lema da Permanência do Sinal é um método inédito que é válido, e nos fornece com mais praticidade as soluções de diversos tipos de inequações.

Geralmente, o Método da Análise do Sinal é facilmente aplicado em situações que envolvem funções polinomiais. Entretanto, é de grande destaque o surgimento de objeções ao trabalhar com outros tipos de funções elementares, como por exemplo, as funções trigonométricas.

A partir disto, é compreensível que os estudantes apresentem dificuldade na resolução por meio do método da análise de sinal, principalmente quando envolvem produtos e/ou quocientes de vários tipos de funções.

Entretanto, o Lema da Permanência do Sinal, simplifica o processo realizado para a resolução, principalmente quando trabalhamos com inequações que apresentam funções não-polinomiais.

# Capítulo 1

## A Noção de Conjunto

Toda a matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto a noção de conjunto é a mais fundamental. A partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas (LIMA, 2006).

Um conjunto é uma coleção qualquer de objetos. Um conjunto é formado por elementos. Um objeto  $a$  qualquer pode ser um elemento de um determinado conjunto  $A$ . Quando isto ocorre, dizemos que  $a$  pertence a  $A$  e escrevemos  $a \in A$ . Caso contrário, dizemos que  $a$  não pertence a  $A$  e escrevemos  $a \notin A$ .

A forma mais comum de representar um conjunto, quando isto é possível, é listando os seus elementos entre chaves e separando-os por vírgulas. Outra maneira de representá-lo é por meio de uma propriedade ou condição que é comum a todos os seus elementos. Por exemplo, consideremos a propriedade  $P : x$  é um número natural ímpar. Essa propriedade pode ser expressa pelo conjunto  $I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$ . Assim, é indiferente dizer que  $x$  possui a propriedade  $P$  ou que  $x$  pertence a  $I$  ( $x \in I$ ).

Consideremos agora a condição  $C : x$  é um número natural que satisfaz a desigualdade  $x > 5$ . Essa condição pode ser expressa pelo conjunto  $A = \{6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ . Nesse caso, também é indiferente dizer que  $x$  satisfaz a condição  $C$  ou que  $x \in A$ .

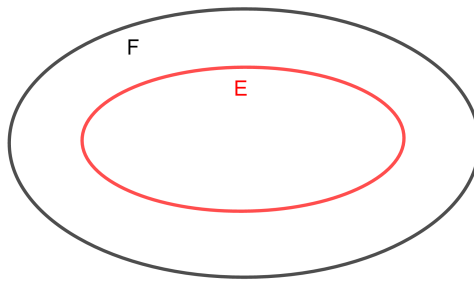
Agora, consideremos dois conjuntos  $E$  e  $F$ . Se todos os elementos de  $E$  forem também elementos de  $F$ , dizemos que  $E$  é um subconjunto de  $F$ , ou que  $E$  está contido em  $F$ , ou ainda, que  $E$  é parte de  $F$ . Expressamos simbolicamente essa sentença usando a notação  $E \subset F$ . Podemos representar essa relação de inclusão em um diagrama, conforme ilustrado na Figura 1.1 abaixo.

Se  $E$  não for subconjunto de  $F$ , escrevemos  $E \not\subset F$ . Nesse caso, existe pelo menos um elemento de  $E$  que não pertence a  $F$ .

Segundo LIMA (2006), os conjuntos substituem as propriedades e as condições. Assim, em vez de dizermos que o objeto  $x$  goza da propriedade  $P$  ou o objeto  $y$  satisfaz a condição  $C$ , podemos escrever  $x \in A$  ou  $y \in B$ , onde  $A$  é o conjunto dos objetos que gozam da propriedade  $P$ , e  $B$  é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição  $C$ .

A vantagem de se utilizar a linguagem e a notação de conjuntos é que entre estes existe uma álgebra, montada sobre as operações de reunião ( $A \cup B$ ) e interseção

Figura 1.1:



$(A \cap B)$ , além da relação de inclusão  $(A \subset B)$ .

A Matemática se ocupa prioritariamente de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas e os conjuntos que se derivam destes, como por exemplo os conjuntos de funções, de matrizes, etc. Portanto, a linguagem dos conjuntos nos permite dar aos conceitos e às proposições a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica. Logo, adota-se universalmente esta linguagem na atual apresentação da Matemática (LIMA, 2006).

## 1.1 O Conjunto dos Números Naturais

Enquanto os conjuntos constituem um meio auxiliar, os números são um dos dois objetos principais de que se ocupa a Matemática. (O outro é o espaço, junto com as figuras geométricas contidas nele). Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza (LIMA, 2006).

Ao decorrer da civilização e as necessidades provocadas por um sistema social cada vez mais complexo, a humanidade apoderou-se desse modelo abstrato de contagem (um, dois, três, quatro,  $\dots$ ) que são os números naturais. Porém, só foi possível, graças ao progresso econômico e a disponibilidade de tempo trazida através dos séculos, que conduziu lentamente ao aperfeiçoamento do conjunto dos números naturais.

O conjunto dos números naturais é representado por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}.$$

O primeiro elemento desse conjunto é o 1. O sucessor de 1 é o 2, o sucessor de 2 é o 3, e assim por diante. Como sempre podemos obter o sucessor de um número natural, dizemos que o conjunto dos números naturais é infinito (DANTE, 2013).

A essência da caracterização do conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  reside na palavra “sucessor” (LIMA, 2006).

Entre os números naturais estão definidas duas operações fundamentais: a adição e a multiplicação. Dados os números  $m, n \in \mathbb{N}$ , a operação de adição associa a estes a sua soma  $m + n \in \mathbb{N}$ , e a operação de multiplicação lhes associa o produto  $m \cdot n \in \mathbb{N}$ . Uma vez introduzidas estas operações, o sucessor do número natural  $m$  passa a ser representado pela soma  $m + 1$ , e a soma de  $m$  parcelas iguais a  $n$ , pelo

produto  $m.n$ . Estas operações gozam das seguintes propriedades, conforme descritas a seguir :

Dados quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , são válidas as seguintes propriedades :

1. Associatividade:  $a + (b + c) = (a + b) + c$  e  $a.(b.c) = (a.b).c$  ;
2. Comutatividade:  $a + b = b + a$  e  $a.b = b.a$  ;
3. Lei do cancelamento:  $a + c = b + c \Rightarrow a = b$  e  $a.c = b.c \Rightarrow a = b$  ;
4. Distributividade:  $a.(c + d) = a.c + a.d$  ;
5. Tricotomia: Dados  $a, b \in \mathbb{N}$ , exatamente uma das três alternativas seguintes pode ocorrer: ou  $a = b$ , ou existe  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $a = b + c$ , ou existe  $d \in \mathbb{N}$  tal que  $b = a + d$ .

Da propriedade da tricotomia, descrita acima, podemos obter uma relação de ordem no conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$ . Dados  $a, b \in \mathbb{N}$  dizemos que  $a$  é menor do que  $b$ , e escrevemos  $a < b$ , se existe  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $b = a + c$ . Esse tal número  $c$  é a diferença entre  $b$  e  $a$ , e é denotado por  $b - a$ .

Como o conjunto  $\mathbb{N}$  é fechado para as operações de soma e produto, é sempre possível efetuar a adição e a multiplicação, ou seja, a soma e o produto entre dois números naturais sempre resultarão em números naturais. Mas, a operação de subtração, que associa a um par de números naturais, a sua diferença, não resulta em uma operação bem definida no conjunto dos naturais. Por exemplo não existe um número natural  $n$  tal que  $5 = 6 + n$ , ou seja a diferença  $5 - 6$ , não está definida no conjunto dos números naturais. A necessidade de se ter um conjunto que contivesse os naturais, e no qual fosse possível a operação de subtração deu origem ao surgimento do conjunto dos números inteiros, que é a união do conjunto dos números naturais, acrescido do zero e dos números inteiros ditos negativos.

## 1.2 O Conjunto dos Números Inteiros

Os números  $-1, -2, -3 \dots$  são chamados de números inteiros negativos. A união entre os números naturais com os inteiros negativos e o zero (0) define o conjunto dos números inteiros que denotamos por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Todas as propriedades de operação em  $\mathbb{N}$  são também válidas no conjunto dos números inteiros, ou seja,  $\mathbb{Z}$  goza de todas as propriedades de operação dos números naturais, tanto as aditivas quanto as multiplicativas. Isto quer dizer que, é sempre possível efetuar a adição e a multiplicação nos inteiros, e o resultado será sempre um número inteiro.

Além das propriedades acima citadas, o conjunto dos inteiros goza das seguintes propriedades, em relação às operações de adição e multiplicação:

1. Existência do elemento neutro:  $a + 0 = a$  e  $a.1 = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{Z}$ .
2. Existência do oposto: Dado  $a \in \mathbb{Z}$  existe  $-a \in \mathbb{Z}$  tal que  $a + (-a) = 0$ .

Observe que em  $\mathbb{Z}$  existe uma simetria em relação ao zero. Portanto, todo número inteiro possui um oposto ou simétrico, por exemplo, o simétrico de 3 é  $-3$ . Veja:

$$3 + (-3) = -3 + 3 = 0$$

Note que, ao somarmos um número com o seu oposto, teremos sempre como resultado o elemento neutro aditivo, o zero, que é único como elemento neutro da adição.

A propriedade da existência do oposto no conjunto dos números inteiros, torna possível a operação de subtração em  $\mathbb{Z}$ . Esta operação é definida da seguinte forma: se  $a, b \in \mathbb{Z}$ , então

$$a - b = a + (-b)$$

Assim, a diferença  $a - b$  é a soma de  $a$  com o oposto de  $b$ .

Então, para  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , valem os seguintes resultados:

1.  $(-a) + (-b) = -(a + b)$ ;
2.  $a - b = -(b - a)$ ;
3.  $(-a).b = -(ab) = a.(-b)$ ;
4.  $(-a).(-b) = ab$ .

Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , dizemos que  $b$  é divisível por  $a$  se existe  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $a.c = b$ . Neste caso dizemos que  $c$  é o quociente de  $b$  por  $a$ , ou que  $c$  é o resultado da divisão de  $b$  por  $a$ . Em símbolos dizemos que  $b \div a = c$ . Por exemplo  $8 \div 2 = 4$ . A operação de divisão, que associa a um par de inteiros, o seu quociente, não é uma operação bem definida no conjunto dos Inteiros. Por exemplo, não existe um inteiro  $a$  tal que  $2.a = -9$ , ou seja, o quociente  $(-9) \div 2$ , não está definido como número inteiro. Portanto, há a necessidade da ampliação do conjunto dos números inteiros, surgindo, então, o conjunto dos Números Racionais, conjunto esse que, além de conter os inteiros, permite que a operação de divisão esteja bem definida.

## 1.3 O Conjunto dos Números Racionais

Os números da forma  $\frac{a}{b}$ , sendo  $a$  e  $b$  inteiros e  $b \neq 0$ , são chamados de frações (de inteiros) e formam o conjunto dos números racionais, denotado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \right\}.$$

A restrição  $b \neq 0$  é necessária, pois  $\frac{a}{b}$ , o quociente de  $a$  por  $b$ , só tem significado se  $b$  não for zero.

Note que, se  $b = 1$ , temos

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a, \text{ ou seja, } \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}.$$

Isto implica que  $\mathbb{Z}$  é subconjunto de  $\mathbb{Q}$ .

Observe ainda, que  $\mathbb{N}$  é subconjunto de  $\mathbb{Z}$ , que por sua vez é subconjunto de  $\mathbb{Q}$ , isto é, todo número natural é inteiro e todo número inteiro também é racional. Sendo assim,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . Logo,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Sejam  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  dois racionais quaisquer. A soma e o produto destes números racionais são obtidos da seguinte forma, respectivamente:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

O conjunto  $\mathbb{Q}$ , munido das operações acima, tem as propriedades algébricas de  $\mathbb{Z}$ , onde o elemento neutro aditivo é  $\frac{0}{1}$  e o neutro multiplicativo é  $\frac{1}{1}$ .

Além disso, todo número racional  $\frac{a}{b} \neq 0$ , isto é, todo elemento não nulo de  $\mathbb{Q}$ , possui inverso multiplicativo.

Sendo assim, com os números racionais, podemos efetuar divisões que eram impossíveis no conjunto dos números inteiros. Por exemplo,  $(-7) : 2 = -3,5$ .

Dado um número racional  $\frac{a}{b}$ ,  $b \neq 0$ , sua representação decimal é obtida dividindo-se  $a$  por  $b$ , podendo resultar em decimais exatos (finitos dígitos na representação) ou em dízimas periódicas (infinitos dígitos na representação).

Por muito tempo, acreditou-se que os números racionais eram suficientes para medir todos os segmentos de reta, ou seja que todos os segmentos eram comensuráveis. Os discípulos de Pitágoras descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis (DANTE, 2013).

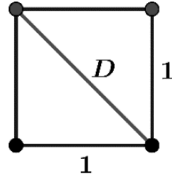
Seja  $AB$  um segmento de reta. Para medi-lo, é necessário fixar um segmento-padrão  $u$ , chamado segmento unitário. Por definição, a medição do segmento  $u$  é igual a 1 (LIMA, 2006).

**Exemplo 1.1.** *Ao medir a diagonal de um quadrado cujo lado mede  $u$ , Figura 1.2 abaixo, resulta em um número que não é racional.*

*Utilizando a relação de Pitágoras, temos:*



Figura 1.2:



$$D^2 = 1^2 + 1^2$$

$$D^2 = 2$$

Visto isso, surge o questionamento: qual número, elevado ao quadrado, é igual a 2?

Podemos obter parte da representação decimal do número fazendo aproximações sucessivas, mas não chegaremos a nenhuma representação decimal exata e nem a uma dízima periódica. Isso nos leva a pensar na possibilidade de que  $\sqrt{2}$  não seja um número racional.

Os números que não admitem uma representação decimal exata e nem uma representação na forma de dízima periódica, chamam-se números irracionais.

No próximo exemplo daremos uma demonstração de que  $\sqrt{2}$  não é um número racional.

**Exemplo 1.2.** *Mostre que  $\sqrt{2}$  é um número irracional.*

**Demonstração:** Para provar que  $\sqrt{2}$  é um número irracional, vamos supor que ele seja um número racional, ou seja, que possa ser escrito na forma  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $q \neq 0$  e chegar a uma contradição.

Supomos que  $\sqrt{2}$  é racional, ou seja,  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ . Consideremos  $\frac{p}{q}$  fração irredutível, ou seja,  $p$  e  $q$  são primos entre si, isto é,  $\text{mdc}\{p, q\} = 1$ .

Elevando ambos os membros da igualdade acima ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Como todo número par pode ser escrito na forma  $2k$ , em que  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que  $p^2 = 2q^2$  é par.

$p^2$  sendo par, implica que  $p$  é par (mostra-se facilmente que o quadrado de um número ímpar também é ímpar), e isto implica que  $p = 2m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Sendo assim,

$$p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2.$$

Então,  $q^2$  é par, logo  $q$  também é par.

Contradição, pois por hipótese  $p$  e  $q$  são primos entre si. Dessa forma,  $\sqrt{2}$  não é racional. Como queríamos. ■

**Exemplo 1.3.**  $\pi$  ( $Pi$ ) é Irracional.

*O número  $\pi = 3,1415926535\dots$ , é obtido dividindo-se a medida do comprimento de qualquer circunferência pela medida de seu diâmetro.*

*Veja algumas aproximações para  $\pi$ :*

$$3 < \pi < 4; \quad 3,1 < \pi < 3,2; \quad 3,14 < \pi < 3,15; \quad \text{etc.}$$

Finalmente, encontramos números que não podem ser representados na forma  $\frac{a}{b}$ ;  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ , tais como

$$\sqrt{2} = 1,41\dots, \pi = 3,14\dots, e = 2,71\dots$$

Esses números formam o conjunto dos Números Irracionais, denotado por  $\mathbb{I}$ .

Portanto, da união dos números racionais com os números irracionais resulta o Conjunto dos Números Reais, denotado por  $\mathbb{R}$ . Logo,  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ .

## Capítulo 2

# O Conjunto dos Números Reais

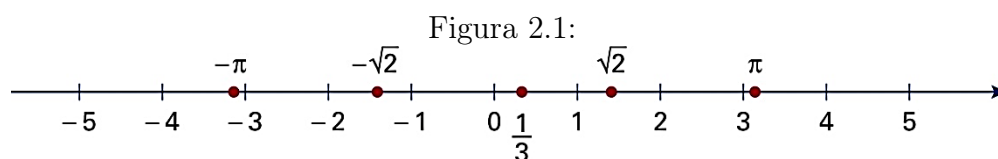
A fim de ganhar uma ideia mais viável dos novos números, que denominamos irracionais e, em particular, situá-los em relação aos racionais, imaginemos uma reta, na qual foi fixado um ponto  $O$ , chamado de origem, e um ponto  $A$ , diferente de  $O$ . Tomamos o segmento  $OA$  como unidade de comprimento. A reta  $OA$  será chamada de a reta real.

A origem  $O$  divide a reta em duas semi-retas, a semi-reta positiva e a semi-reta negativa. Ou seja, os pontos da semi-reta positiva estão à direita de  $O$  e os da semi-reta negativa à esquerda de  $O$  (LIMA, 2006).

O conjunto dos números reais pode ser visto como modelo aritmético de uma reta, enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de  $\mathbb{R}$ . Cada ponto da reta corresponde a um único número real, e reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto na reta (DANTE, 2013).

Dizemos então, que há uma correspondência biunívoca ou bijeção entre os números reais e os pontos da reta. A reta real é construída da seguinte forma: numa reta, escolhemos uma origem (zero), um sentido e uma unidade de comprimento.

A Figura 2.1 abaixo ilustra a reta real.



O conjunto  $\mathbb{R}$ , cujos elementos são os números racionais e os números irracionais chama-se o Conjunto dos Números Reais. Sendo assim,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Além disso, o conjunto  $\mathbb{R}$  está munido de todas as operações e goza de todas as propriedades, já citadas, válidas para os conjuntos numéricos anteriores.

## 2.1 Desigualdades

Para podermos dizer que um número real é maior ou menor que outro, devemos introduzir o conceito de número real positivo e uma relação de ordem.

A relação de desigualdade,  $x < y$ , entre números reais é fundamental. Por isso é conveniente destacar algumas de suas propriedades, a fim de que saibamos o que estamos fazendo quando operarmos com essa relação (LIMA, 2006).

Para significar um número real positivo, escreve-se  $x > 0$ . O conjunto dos números reais positivos será designado por  $\mathbb{R}^+$ .

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

As propriedades dos números positivos que resultam tudo o que se pode provar sobre desigualdades, são as seguintes:

1. Dado  $x \in \mathbb{R}$ , há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou  $x$  é positivo, ou  $x = 0$  ou  $-x$  é positivo. Isto é, ocorre uma e somente uma destas possibilidades.
2. A soma e o produto de números positivos são ainda números positivos.

Uma vez definida essa relação de ordem dos números reais, dizemos que estão ordenados. Assim, usamos as seguintes notações:

1. Os símbolos  $<$  (menor que) e  $>$  (maior que) são definidos:  
 $x < y$  significa que  $y - x$  é positivo;  
 $x > y$  significa que  $x - y$  é positivo.
2. Os símbolos  $\leq$  (menor ou igual que) e  $\geq$  (maior ou igual que) são definidos:  
 $x \leq y$  significa que  $x < y$  ou  $x = y$ ;  
 $x \geq y$  significa que  $x > y$  ou  $x = y$ .

As expressões que envolvem os símbolos definidos acima, são chamadas de desigualdades. Onde,  $x < y$  e  $x > y$  são desigualdades estritas, enquanto  $x \leq y$  e  $x \geq y$  são desigualdades não estritas.

A desigualdade entre números reais reduz-se ao conhecimento dos números positivos, pois a afirmação  $x < y$  significa a diferença  $y - x$  é um número positivo.

De acordo com LIMA(2006), as propriedades essenciais da relação de ordem  $x < y$  (ou  $y > x$ ) são :

1. Tricotomia: dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , ocorre uma e somente uma das seguintes alternativas:  $x < y$ ,  $x = y$  ou  $y < x$ ;
2. Transitividade: se  $x < y$  e  $y < z$  então  $x < z$ ;
3. Monotonicidade da adição: se  $x < y$ , então  $\forall z \in \mathbb{R}$  tem-se  $x + z < y + z$ ;

4. Monotonicidade da multiplicação: se  $x < y$  e  $z$  é positivo então  $xz < yz$ .

**Demonstração:** As propriedades enunciadas podem ser facilmente provadas usando-se as definições anteriores.

1. A tricotomia resulta imediatamente das propriedades dos números reais positivos.

Portanto, ou  $y - x$  é positivo, ou é zero ou é negativa ( $y < x$ ).

2. Em relação a transitividade: se  $x < y$  e  $y < z$  então  $y - x$  e  $z - y$  são positivos. Logo,  $(y - x) + (z - y)$  é positiva. Daí,

$$(y - x) + (z - y) = y + (-y) + z - x = z - x > 0 \Rightarrow x < z.$$

3. A monotonicidade da adição: se  $x < y$ , então  $y - x > 0$ , por definição.

Note que,  $0 = z + (-z)$  (elemento neutro da soma), então

$$y - x = y - x + z + (-z) = y + z - x - z = (y + z) - (x + z) > 0 \Rightarrow x + z < y + z.$$

4. Em relação da monotonicidade da multiplicação, vamos partir do fato que o produto de dois números positivos também ainda é um número positivo.

Se  $x < y$  e  $z$  são positivos, então  $y - x > 0$  e  $z > 0$ . Daí,

$$(y - x)z = yz - xz > 0 \Rightarrow xz < yz.$$

Como queríamos.

Agora, vamos demonstrar algumas propriedades consideradas essenciais que derivam das anteriores.

5. Se  $x \neq 0$  então  $x^2 > 0$ ;

Se  $x > 0$ , então  $x^2 > 0$ .

Se  $x < 0$ , então  $-x > 0$ , e daí temos  $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 > 0$ .

Logo,  $x^2 > 0$ .

6. Se  $0 < x < y$  então  $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ ;

Multiplicando ambos os membros da desigualdade  $x < y$  por  $\frac{1}{xy} > 0$ , obtemos

$$\frac{x}{xy} < \frac{y}{xy} \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

7. Se  $x < y$  e  $z < 0$  então  $xz > yz$ ;

Temos  $x < y \Rightarrow y - x > 0$  e  $-z > 0$ . Daí

$$(y - x)(-z) = -yz + xz = xz - yz > 0 \Rightarrow xz > yz.$$

■

**Observação 2.1.** (*Regra dos Sinais*) De acordo com a definição dos números reais positivos e propriedades demonstradas, concluímos que:

*Se  $x \cdot y < 0$  então  $x$  e  $y$  têm sinais opostos;*

*Se  $x \cdot y > 0$  então  $x$  e  $y$  têm o mesmo sinal.*

*O mesmo se aplica para o quociente  $\frac{x}{y}$ .*

## 2.2 Os Intervalos Reais

Sejam  $a, b$  números reais, com  $a \leq b$ . Os subconjuntos de  $\mathbb{R}$  definidos a seguir são chamados de intervalos.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\};$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\};$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Os intervalos listados acima são limitados, com extremos  $a$  e  $b$ , onde  $[a, b]$  representa um intervalo fechado e  $(a, b)$  representa um intervalo aberto.

A seguir, os intervalos ilimitados:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\};$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\};$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Note que,  $(-\infty, b]$  é a semi-reta, à esquerda de  $b$ , fechada, de origem  $b$ . E o último intervalo é toda reta real. Para o intervalo aberto  $(a, b)$  também pode ser usada a notação  $]a, b[$ .

Deve-se ressaltar que  $+\infty$  e  $-\infty$  não são números reais. São apenas partes da notação dos intervalos ilimitados.

Os intervalos são os subconjuntos de  $\mathbb{R}$  mais comumente encontrados.

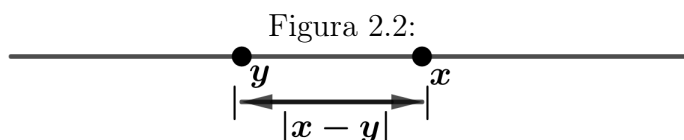
## 2.3 O Valor Absoluto

O valor absoluto ou módulo de um número real  $x$ , denotado por  $|x|$ , é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ se } x \geq 0; \\ -x & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo,  $|2| = 2$ ;  $|-3| = -(-3) = 3$  e obviamente,  $|0| = 0$ .

Uma importante interpretação do valor absoluto, geometricamente, é que o módulo de um número indica, na reta real, a distância desse número ao zero. Por exemplo, a distância do 4 ao 0 é  $|4| = |4 - 0| = 4$ . Além disso, se  $x$  e  $y$  são respectivamente dois pontos sobre a reta  $\mathbb{R}$  então  $|x - y|$  é a distância do ponto  $x$  ao ponto  $y$ . Veja figura 2.2 abaixo.



Observe que,  $|x - y| = |y - x|$ .

Algumas vezes o valor absoluto também pode ser caracterizado por  $|x| = \sqrt{x^2}$ .

**Exemplo 2.2.** Defina  $|x - 3|$ .

**Solução:**

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & , \text{ se } x \geq 3; \\ 3 - x & , \text{ se } x < 3 \end{cases}$$

■

Ao lidarmos com valores absolutos, não basta saber que  $|x|$  é igual a  $x$  ou a  $-x$ . É necessário especificar quando é que se tem cada um destes casos. Esta observação deve ser aplicada especialmente na resolução de desigualdades (LIMA, 2006).

# Capítulo 3

## As Funções

**Definição 3.1.** *Dados os conjuntos  $X$ ,  $Y$ , uma função  $f : X \rightarrow Y$  (lê-se “uma função de  $X$  em  $Y$ ”) é uma regra que diz como associar a cada elemento  $x \in X$  um único elemento  $y = f(x) \in Y$ .*

$$\begin{array}{ccc} f : X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

O conjunto  $X$  chama-se o domínio e  $Y$  o contra-domínio da função  $f$ . Para cada  $x \in X$ , o elemento  $f(x) \in Y$  chama-se a imagem de  $x$  pela função  $f$ , ou valor assumido pela função  $f$  no ponto  $x \in X$  (LIMA, 2006).

**Exemplo 3.2.** *Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \mathbb{Z}$  e  $f : A \rightarrow B$  a função definida pela regra que, a cada elemento de  $A$ , faz corresponder o seu dobro. Então:*

1. *A regra que define  $f$  é  $y = 2x$ ;*
2. *O domínio de  $f$ ,  $D(f) = A$ ;*
3. *O contra-domínio de  $f$  é  $\mathbb{Z}$ ;*
4. *A imagem do elemento 1 é 2, a imagem do 2 é 4, e assim por diante. Logo, a imagem de  $f$  é o conjunto  $Im(f) = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .*

Dada uma função  $f : X \rightarrow Y$ , dizemos que ela é injetiva quando elementos diferentes de  $X$  são transformados por  $f$  em elementos diferentes de  $Y$ . Isto é,  $x_1 \neq x_2$  em  $X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , ou equivalentemente, Se  $f(x_1) = f(x_2)$  então  $x_1 = x_2$ .

Diremos que  $f$  é sobrejetiva quando para qualquer elemento  $y$  de  $Y$ , pode-se encontrar pelo menos um elemento  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Equivalentemente,  $f$  é sobrejetiva se o conjunto imagem de  $f$  é igual ao contra-domínio  $Y$ , ou seja,  $f(X) = Y$ .

A função  $f$  é chamada de bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

**Exemplo 3.3.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2$ . Determine o domínio e a imagem de  $f$ . A função  $f$  é injetiva? É sobrejetiva? É bijetiva?*



**Solução:**

Neste caso,  $D(f) = \mathbb{R}$  e  $Im(f) = [0, +\infty)$ .

A função  $f(x) = x^2$  não é sobrejetiva, pois o seu contra-domínio é o conjunto de todos os números reais e a sua imagem é o conjunto  $Im(f) = [0, +\infty)$ , ou seja a imagem são apenas os números reais não-negativos.

$f$  também não é injetiva pois,

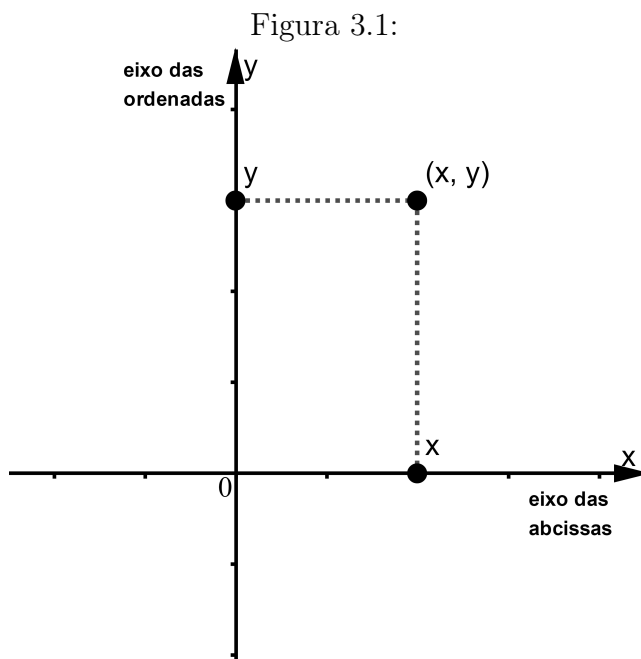
$$f(2) = 2^2 = 4 \text{ e } f(-2) = (-2)^2 = 4,$$

entretanto  $2 \neq -2$ . Portanto, por definição,  $f$  não é injetiva. Sendo assim,  $f$  também não é bijetiva. ■

**Definição 3.4.** *Seja  $f$  uma função. O gráfico de  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  do plano coordenado, onde  $x$  pertence ao domínio de  $f$  e  $y$  é a imagem de  $f(x)$ .*

Os pares ordenados  $(x, f(x))$ , com  $x$  no domínio de  $f$ , são todos os pontos pertencentes ao gráfico. Ligando esses pontos teremos o esboço do gráfico da função  $f$ .

O plano coordenado é o ambiente onde o gráfico é construído, chamado de plano cartesiano. Ele é estabelecido pelo encontro dos eixos cartesianos  $x$  e  $y$ , conhecidos como eixo das abscissas e eixo das ordenadas, respectivamente, ilustrados na Figura 3.1.



Uma função, cujo domínio é um intervalo, é contínua quando seu gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel, isto é, não há interrupções no gráfico. Logo, seu gráfico não apresenta quebras ou saltos.

Assim como podemos adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números, também podemos produzir novas funções através dessas operações. Ou seja,

1.  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2.  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3.  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4.  $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

**Definição 3.5.** Os valores de  $x$  para os quais a função  $f$  se anula, são chamados de as raízes ou zeros da função  $f$ .

Geometricamente, as raízes da função são as abscissas dos pontos de interseção do gráfico com o eixo  $x$ .

**Definição 3.6.** Uma equação é uma igualdade entre duas expressões matemáticas que se verifica para determinados valores das variáveis.

**Observação 3.7.** Uma equação na variável ou incógnita  $x$  pode ser expressa na forma  $f(x) = 0$ , onde  $f$  é uma função. As expressões

$$2x - 1 = 0; -x^5 + 4x^3 + 5x - 1 = 0; 3^x = 0; \sin(2x) - \pi = 0.$$

são exemplos de equações.

## 3.1 Função Afim

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se função afim ou do 1º grau quando existem dois números reais  $a$  e  $b$ , tais que  $f(x) = ax + b$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

Por exemplo, as seguintes funções são do 1º grau:

$$f(x) = 2x - 3; \quad g(x) = -4x + 1; \quad h(x) = 3x - \pi.$$

O gráfico de uma função afim é uma reta. Para esboçarmos o seu gráfico precisamos apenas de dois pontos.

**Exemplo 3.8.** Encontre a raiz da função  $f(x) = 3x - 2$  e esboce seu gráfico.

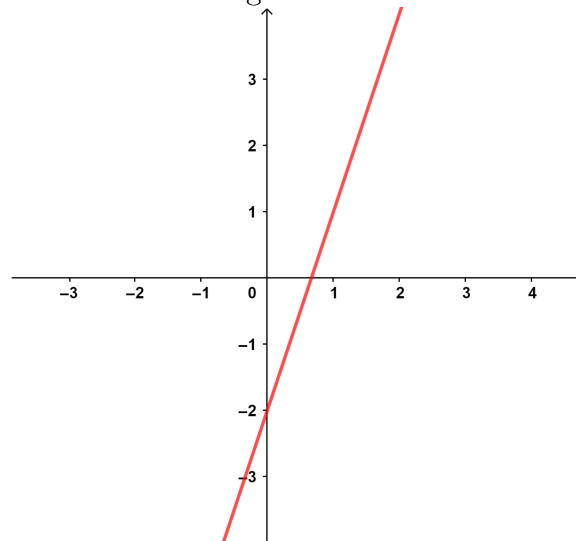
**Solução:** Para encontrar a raiz, devemos resolver a equação  $f(x) = 0$ , assim temos que:

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Portanto, a raiz é  $x = \frac{2}{3}$ .

A Figura 3.2 ilustra o esboço do seu gráfico.

Figura 3.2:



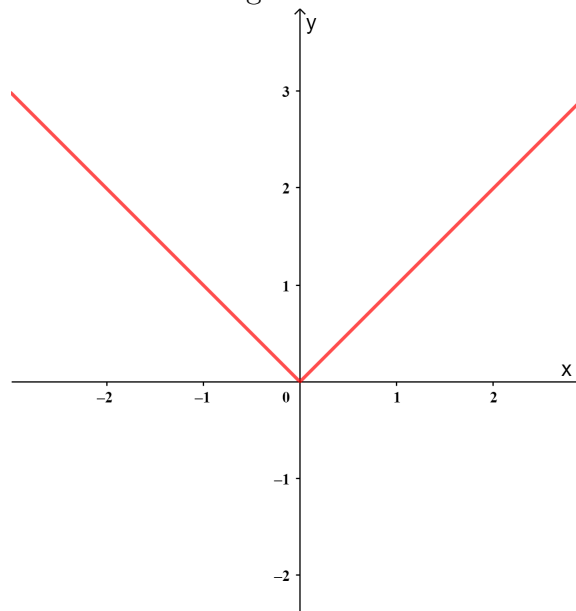
Note que este tipo de função admite uma única raiz.

■

### 3.1.1 Função Modular

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = |x|$ , é chamada de função modular. O gráfico desta função é ilustrado pela Figura 3.3.

Figura 3.3:



Note que, o gráfico de uma função modular é uma linha poligonal, por isso, é considerada uma função do tipo poligonal.

Observe que certos trechos do gráfico coincidem com o gráfico de uma função afim, por isso, essa função também é chamada de função afim por partes (DANTE,

2013).

Para  $x < 0$ , temos o gráfico da função afim  $f(x) = -x$  e, para  $x \geq 0$ , temos o gráfico de  $f(x) = x$ .

## 3.2 Função Quadrática

Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se função quadrática ou do 2º grau quando existem números reais  $a, b$  e  $c$ ,  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por exemplo, as seguintes funções são do 2º grau:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1; \quad g(x) = -x^2 + 100x; \quad h(x) = x^2 - 4.$$

O estudo da função quadrática tem sua origem na resolução das equações do segundo grau. A fórmula que conhecemos por fórmula de Bháskara, em homenagem ao matemático indiano de mesmo nome, e que determina as soluções de uma equação do segundo grau, só veio a aparecer do modo como a usamos, muito mais tarde, com o francês Viète (DANTE, 2013).

Portanto, se  $x_1$  e  $x_2$  são as duas raízes de uma função do 2º grau, então seus valores são dados pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac$  é o conhecido discriminante da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Observe que as raízes  $x_1$  e  $x_2$  só são números reais se  $\Delta \geq 0$ , e serão números distintos se  $\Delta > 0$ . No caso de  $\Delta < 0$  essas raízes não são números reais.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Se o coeficiente líder for positivo ( $a > 0$ ), a parábola tem a concavidade voltada para cima. Se  $a < 0$ , a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

A intersecção da parábola com o eixo  $x$  define as raízes da função.

**Exemplo 3.9.** *Determine as raízes da função quadrática  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  e esboce o seu gráfico.*

**Solução:** Observe que  $a = 1$ ,  $b = -5$  e  $c = 6$ .

O primeiro passo é calcular o valor do discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.6 = 1 \Rightarrow \Delta > 0.$$

Logo, a função possui duas raízes reais e distintas. Então:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

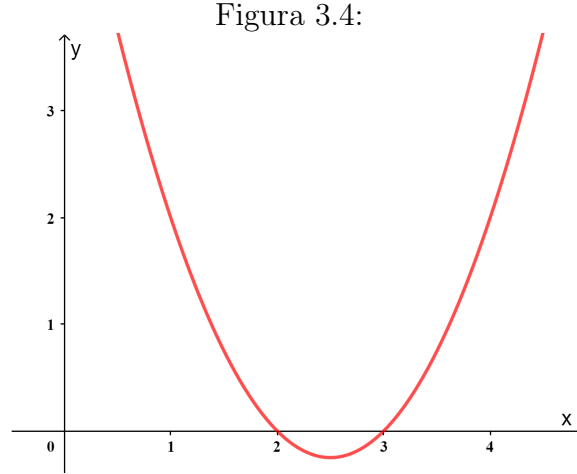
Daí,

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Portanto,  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$  são as raízes da função. ■

O esboço do gráfico é ilustrado pela Figura 3.4.



**Proposição 3.10.** *Relação entre os coeficientes e raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  com  $a \neq 0$ .*

Vamos estabelecer agora as relações entre os coeficientes  $a, b$  e  $c$  e as raízes  $x_1$  e  $x_2$ .

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Somando  $x_1$  com  $x_2$ , obtemos

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Multiplicando  $x_1$  por  $x_2$ , obtemos

$$x_1 \cdot x_2 = \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = -\frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

**Proposição 3.11.** *Se  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , e  $\Delta \geq 0$  então  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são suas raízes reais e distintas.*

**Demonstração:** Vamos utilizar o resultado da proposição anterior, relações entre as raízes e coeficientes.

$$ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 - \left( \frac{-b}{a} \right) x + \frac{c}{a} \right] = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] =$$

$$= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Como queríamos.

Note que, quando  $\Delta = 0$ ,  $x_1 = x_2$ . Então,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

■

**Proposição 3.12.** *Se  $\Delta < 0$ , o sinal da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é igual ao sinal do coeficiente  $a$ .*

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]. \end{aligned}$$

$\Delta < 0 \Rightarrow -\Delta > 0$ , e disso decorre que a expressão  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ . Portanto o sinal de  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é igual ao sinal do coeficiente  $a$ .

■

### 3.3 Funções Polinomiais

Diz-se que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função polinomial ou um polinômio quando existem números  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Se  $a_n \neq 0$  dizemos que  $n$  é o grau do polinômio e  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são seus coeficientes.

As funções polinomiais são funções contínuas (possuem gráficos contínuos) em toda a reta real, e o seu domínio máximo é  $\mathbb{R}$ .

Note que, funções afins e quadráticas são funções polinomiais.

Por exemplo,  $f(x) = 3x - 1$  é um polinômio de grau 1;  $g(x) = 4x^3 + 7x + 1$  é um polinômio de grau 3;  $p(x) = 8x^4$  é um monômio de grau 4;  $q(x) = 7$  é um polinômio de grau 0.

Dizemos que um número real  $r$  é uma raiz para a função  $f$ , se  $f(r) = 0$ .

Conhecer todas as raízes reais de uma função polinomial é uma ferramenta que ajuda no esboço do seu gráfico, pois para os valores de  $x$  maiores do que a maior raiz, ou menores do que a menor raiz, o gráfico da função se mantém sempre acima ou sempre abaixo do eixo  $x$ . Além disso o conhecimento de todas as raízes será fundamental para resolver as inequações polinomiais associadas.

As Figuras 3.5 e 3.6 abaixo ilustram os esboços de gráficos de funções polinomiais.

Figura 3.5:  $f(x) = x^3 - 2x$

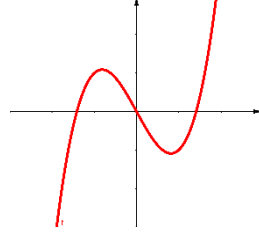
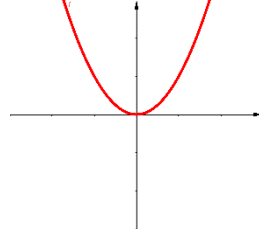


Figura 3.6:  $f(x) = x^2$



Achar as raízes de funções polinomiais de grau maior ou igual a 3, não é uma tarefa tão simples. Porém existem métodos práticos para achar essas raízes, tais como: o dispositivo prático de Briott-Ruffini e o Teorema das Raízes Racionais.

Considere dois polinômios  $p(x)$  e  $d(x)$ , com  $d(x) \neq 0$ . Dividir  $p(x)$  por  $d(x)$ , significa determinar os polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$ , tais que

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x),$$

onde  $\text{grau}(r) < \text{grau}(d)$  ou  $r(x) = 0$ . Os polinômios  $p(x)$ ,  $d(x)$ ,  $q(x)$  e  $r(x)$ , são chamados de polinômios dividendo, divisor, quociente e resto, respectivamente.

A divisão de um polinômio por divisores da forma  $(x - a)$  é parte integrante do processo para encontrar raízes para funções polinomiais: uma vez se tendo encontrado uma raiz  $a$  de  $p(x)$ , a divisão de  $p(x)$  por  $(x - a)$  permite obter um polinômio de menor grau cujas raízes são as demais raízes de  $p(x)$  (LIMA, 2005).

**Teorema 3.13.** (*Teorema do Resto*) Dado um polinômio  $p(x)$  com grau igual a 1 ou maior que 1, o resto da divisão de  $p(x)$  por  $x - a$  é igual a  $p(a)$ .

**Demonstração:** Na divisão de  $p(x)$  por  $(x - a)$ , temos

$$p(x) = q(x)(x - a) + r(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Substituindo  $x$  por  $a$ , temos

$$p(a) = q(a)(a - a) + r(a) \Rightarrow p(a) = 0 + r(a) \Rightarrow r(a) = p(a).$$

Como queríamos. ■

**Teorema 3.14.** (*Teorema de D'Alembert*) Um polinômio  $p(x)$  é divisível por  $(x - a)$  se, e somente se,  $a$  é raiz de  $p(x)$ , isto é,  $p(a) = 0$ .

**Demonstração:** Pelo teorema do resto, temos que  $p(a) = r(x)$  é o resto da divisão de  $p(x)$  por  $x - a$ .

Logo,  $p(x)$  é divisível por  $(x - a) \Leftrightarrow r(x) = p(a) = 0$ , ou seja,  $a$  é raiz de  $p(x)$ . ■

### 3.3.1 O Dispositivo de Briott-Ruffini

O Dispositivo de Briott-Ruffini é um método que permite determinar o quociente e o resto da divisão de um polinômio  $p(x)$  por um binômio da forma  $(x - a)$  de uma maneira simples e rápida.

Esse método utiliza apenas os coeficientes do dividendo  $p(x)$  com grau  $\geq 1$ , e o valor de  $a$ , que é a raiz do divisor  $(x - a)$ .

Observe como devem ser arranjados os coeficientes nesse dispositivo.

|     |           |           |          |       |       |
|-----|-----------|-----------|----------|-------|-------|
|     | $a_n$     | $a_{n-1}$ | $\cdots$ | $a_1$ | $a_0$ |
| $a$ | $q_{n-1}$ | $q_{n-2}$ | $\cdots$ | $q_0$ | $r$   |

Onde  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  são os coeficientes do dividendo,  $a$  é a raiz do divisor e  $q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_0$  são os coeficientes do quociente e  $r$  é o resto.

Os coeficientes da segunda linha são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 q_{n-1} &= a_n \\
 q_{n-2} &= (q_{n-1}) \cdot a + a_{n-1} \\
 q_{n-3} &= (q_{n-2}) \cdot a + a_{n-2} \\
 &\vdots \\
 r &= q_0 \cdot a + a_0
 \end{aligned}$$

O dispositivo de Briott-Ruffini consiste na elaboração de uma tabela com o objetivo de calcular, sucessivamente, os coeficientes do quociente e o resto, usando a fórmula recursiva acima.

**Exemplo 3.15.** *Determinar todas as raízes de  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ , sabendo que 2 é uma de suas raízes.*

**Solução:** Vamos determinar o quociente e o resto da divisão de  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  por  $x - 2$  utilizando o dispositivo de Briott-Ruffini.

Para isso, escreveremos o polinômio dividendo da seguinte forma:

$$p(x) = 1x^3 - 3x^2 + 0x + 4$$



1. Primeiramente, dispomos os valores que participam do cálculo para montar o dispositivo.

|   |   |    |   |   |
|---|---|----|---|---|
|   | 1 | -3 | 0 | 4 |
| 2 |   |    |   |   |

2. Repetimos o coeficiente líder do dividendo  $p(x)$  na linha de baixo.

|   |   |    |   |   |
|---|---|----|---|---|
|   | 1 | -3 | 0 | 4 |
| 2 | 1 |    |   |   |

3. Multiplicamos o valor de  $a = 2$  por esse coeficiente e somamos o produto obtido com o próximo coeficiente de  $p(x)$ , colocando o resultado abaixo desse coeficiente.

|   |   |    |   |   |
|---|---|----|---|---|
|   | 1 | -3 | 0 | 4 |
| 2 | 1 | -1 |   |   |

4. Multiplicamos o valor de  $a = 2$  pelo resultado que acabamos de obter, somamos o produto com o próximo coeficiente de  $p(x)$  e colocamos esse novo resultado abaixo desse coeficiente.

|   |   |    |    |   |
|---|---|----|----|---|
|   | 1 | -3 | 0  | 4 |
| 2 | 1 | -1 | -2 |   |

5. Repetimos o processo até o último coeficiente de  $p(x)$ , que está à direita. O ultimo resultado é o resto da divisão, e os demais números obtidos são os coeficientes do quociente, dispostos ordenadamente segundo as potências decrescentes de  $x$ .

|   |   |    |    |   |
|---|---|----|----|---|
|   | 1 | -3 | 0  | 4 |
| 2 | 1 | -1 | -2 | 0 |

Assim, encontramos o quociente  $q(x) = x^2 - x - 2$  e o resto  $r = 0$ . Portanto,  $(x - 2)$  divide  $p(x)$ . Agora, para sabermos se  $(x - 2)^2$  divide  $p(x)$ , ou ainda, se temos outra raiz igual a 2, continuamos o processo.

|   |   |    |    |   |
|---|---|----|----|---|
|   | 1 | -3 | 0  | 4 |
| 2 | 1 | -1 | -2 | 0 |
| 2 | 1 | 1  | 0  |   |

Com isso temos que  $(x - 2)^2$  divide  $p(x)$ , portanto  $p(x)$  tem duas raízes iguais a 2. Agora, escrevendo os coeficientes da última linha, temos

$$p(x) = (x - 2)^2(x + 1)$$

Logo, a última raiz de  $p(x)$  é igual a -1.

Tal método pode ser eficaz quando se conhece o valor de uma ou mais raízes do polinômio  $p(x)$ , dispensando resoluções mais trabalhosas para a localização das demais raízes.

■

### 3.3.2 Teorema das Raízes Racionais

**Teorema 3.16.** *Se  $\frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  inteiros e não-nulos e primos entre si, é raiz racional da equação polinomial de grau  $n$  com coeficientes inteiros  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  ( $a_n \neq 0$ ), então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .*

Esse teorema não garante a existência de raiz racional de um polinômio com coeficientes inteiros. Mas, se ela existir, ele indica uma forma de encontrá-la.

Dessa forma, o teorema das raízes racionais nos permite fazer uma lista de todas as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros. Daí, podemos testá-los e verificar quais dos possíveis candidatos são realmente raízes da função.

**Exemplo 3.17.** *Determine todas as raízes da função*

$$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 72x^2 - 127x + 50.$$

**Solução:** Como a função dada tem todos os coeficientes inteiros, aplicamos o teorema das raízes racionais.

Assim,  $a_0 = 50$  e  $a_n = 3$ .

Possíveis valores de  $p$  :

$$D(50) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 25, \pm 50\}.$$

Possíveis valores de  $q$  :

$$D(3) = \{\pm 1, \pm 3\}.$$

Fazendo  $\frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si obtemos:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 25, \pm 50, \pm 1/3, \pm 2/3, \pm 5/3, \pm 10/3, \pm 25/3, \pm 50/3.$$

Verificando os valores encontrados, concluímos que  $x = -2$  é uma raiz de  $f(x)$ , isto é,  $f(-2) = 0$ .

Como  $-2$  é raiz, pelo Teorema de D'Alembert,  $f(x)$  é divisível por  $x + 2$ .

Então, aplicando o dispositivo de Briott-Ruffini para fatorar o polinômio, temos

|    |   |   |     |      |    |
|----|---|---|-----|------|----|
|    | 3 | 8 | -72 | -127 | 50 |
| -2 | 3 | 2 | -76 | 25   | 0  |

Logo,  $f(x) = (x + 2)(3x^3 + 2x^2 - 76x + 25)$ .

Agora, vamos repetir o processo, aplicando o teorema das raízes racionais em  $q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 76x + 25$ .

Neste caso, temos  $a_0 = 25$  e  $a_n = 3$ .

Possíveis valores de  $p$  :

$$D(25) = \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\}.$$

Possíveis valores de  $q$  :

$$D(3) = \{\pm 1, \pm 3\}.$$

Fazendo  $\frac{p}{q}$  com  $p$  e  $q$  primos entre si obtemos:

$$\pm 1, \pm 5, \pm 25, \pm 1/3, \pm 5/3, \pm 25/3.$$

Verificando os valores encontrados, podemos concluir que  $x = \frac{1}{3}$  é uma raiz de  $q(x)$ , isto é,  $q(\frac{1}{3}) = 0$ .

Utilizando o dispositivo de Brioft-Ruffini, obtemos

|               |   |   |     |    |
|---------------|---|---|-----|----|
|               | 3 | 2 | -76 | 25 |
| $\frac{1}{3}$ | 3 | 3 | -75 | 0  |

Logo,

$$f(x) = (x + 2)(x - \frac{1}{3})(3x^2 + 3x - 75) = (x + 2)(3x - 1)(x^2 + x - 25).$$

Logo, as demais raízes, podem ser encontradas resolvendo a equação quadrática  $x^2 + x - 25 = 0$ , sem dificuldade, utilizando a fórmula de Bháskara.

■

### 3.4 Função Exponencial

Seja  $a$  um número real positivo tal que  $a \neq 1$ . A função exponencial de base  $a$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = a^x$ , é uma função que tem as seguintes propriedades, para quaisquer que sejam  $x$  e  $y$  reais:

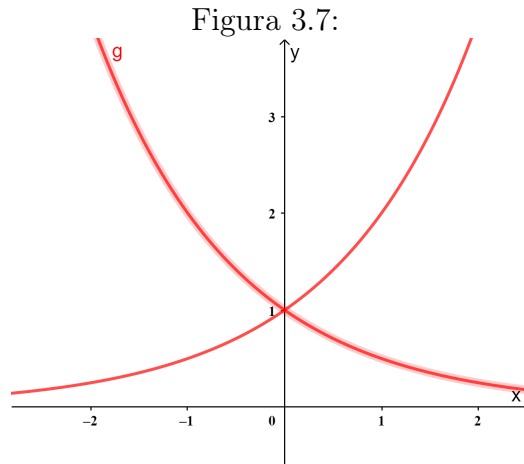
1.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ;
2.  $a^1 = a$ ;
3.  $x < y \Rightarrow a^x < a^y$  quando  $a > 1$  e  $x < y \Rightarrow a^x > a^y$  quando  $0 < a < 1$ .

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares (LIMA, 2006).

A função exponencial é contínua.

Por exemplo, são funções exponenciais:  $f(x) = 3^x$ ;  $g(x) = 7^x$ ;  $h(x) = 5^{x-2}$ .

A Figura 3.7 ilustra gráficos da função  $f(x) = a^x$ , nos casos  $a > 1$  e  $0 < a < 1$ .



O gráfico é uma figura chamada curva exponencial, que passa pelo ponto  $(0, 1)$  e está toda acima do eixo  $x$ , pois  $y = a^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Logo, a curva não toca o eixo  $x$ , ou seja, não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 0$ , isto é, a função não possui raízes.

A função é crescente se  $a > 1$  e decrescente se  $0 < a < 1$ . Em ambos os casos a função é injetiva.

**Definição 3.18.** *As equações exponenciais são aquelas em que a incógnita aparece nos expoentes.*

Por exemplo,  $4^x = 32$ ;  $25^{x+1} = \sqrt{5^x}$ .

Para resolvê-las, transformamo-las, se possível, em uma igualdade de potências de mesma base, e usamos a injetividade da função, ou seja:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

**Exemplo 3.19.** Resolva a equação  $3^{x-1} = 81$ .

**Demonstração:** Primeiramente, vamos transformar a equação dada em uma igualdade de potências de mesma base

$$3^{x-1} = 81 = 3^4.$$

Igualando os expoentes, temos uma equação do 1º grau

$$x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5.$$

Logo,  $S = \{5\}$ . ■

**Observação 3.20.** Uma função exponencial muito importante em Matemática é aquela cuja base é o número  $e$ . esse número é irracional, e é a base dos logaritmos naturais. Ele é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1. Um valor aproximado dessa importante constante é  $e = 2,718281828459$ .

## 3.5 Função Logarítmica

Diz-se que a função  $g : Y \rightarrow X$  é a inversa da função  $f : X \rightarrow Y$  quando se tem  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(y)) = y$  para quaisquer  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Evidentemente,  $g$  é a inversa de  $f$  se, e somente se,  $f$  é a inversa de  $g$ .

Quando  $g$  é a inversa de  $f$ , tem-se  $g(y) = x$  se, e somente se,  $f(x) = y$ . Portanto, se  $f : X \rightarrow Y$  possui inversa então  $f$  é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma bijeção entre  $X$  e  $Y$  (LIMA, 2006).

A inversa da função exponencial de base  $a$  é a função  $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada  $x$  real positivo o número real  $\log_a x$ .

Por definição de inversa segue que:  $a^{\log_a x} = x$ ,  $\forall x > 0$  e  $\log_a(a^x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Assim,  $\log_a x$  é o expoente ao qual se deve elevar a base  $a$  para obter o número  $x$ . Ou seja,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Como  $a^0 = 1$ , tem-se  $\log_a 1 = 0$ . É importante ressaltar que só números positivos possuem logaritmo real, pois a função  $x \rightarrow a^x$  somente assume valores positivos (LIMA, 2006).

As principais propriedades das funções logarítmicas são:

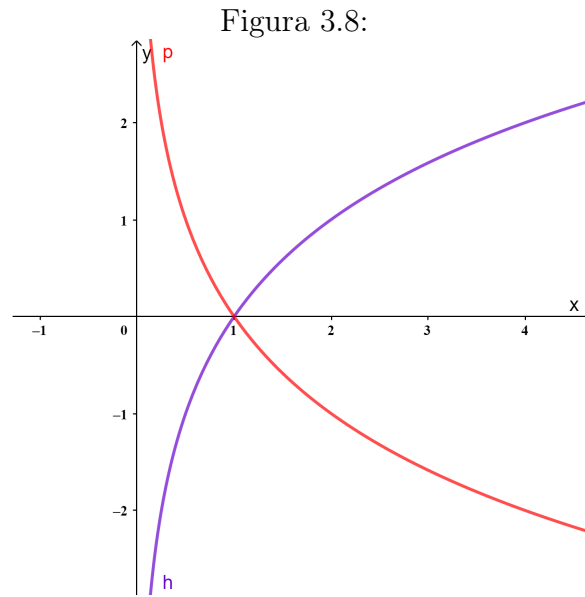
1.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ,  $\forall x, y > 0$ ;
2.  $\log_a x^r = r \log_a x$ ,  $\forall r \in \mathbb{R}$ ;
3. Mudança de Base:  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ;
4.  $0 < x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$  quando  $a > 1$  e  $0 < x < y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$  quando  $0 < a < 1$ .

As funções logarítmicas mais utilizadas são a de base 10 (logaritmos decimal), e a de base  $e$  (logaritmo natural).

São exemplos de funções logarítmicas:

$$f(x) = \log_2 x; \quad g(x) = \log_{10} x; \quad h(x) = \log_e x = \ln x.$$

A Figura 3.8 ilustra o gráfico da função  $f(x) = \log_a x$ .



O gráfico corta o eixo  $x$  em  $(1, 0)$  e está todo à direita do eixo  $y$ . Ou seja, somente números positivos possuem logaritmo real.

A função  $f(x) = \log_a x$  é crescente se  $a > 1$  e decrescente se  $0 < a < 1$ . Em ambos os casos a função é injetiva.

**Definição 3.21.** As equações logarítmicas são aquelas nas quais a incógnita está envolvida no logaritmando ou na base do logaritmo.

Alguns exemplos:  $\log_3 x = 5$ ;  $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 1$ ;  $\log_{x-1} 3 = 2$

**Exemplo 3.22.** Resolva a equação  $\log_3(x^2 - 3x - 1) = 1 + \log_3(x - 2)$ .

**Solução:** Condição de existência:  $x^2 - 3x - 1 > 0$  e  $x - 2 > 0$ .

$$\begin{aligned} \log_3(x^2 - 3x - 1) &= 1 + \log_3(x - 2) \Rightarrow \log_3(x^2 - 3x - 1) = \log_3 3 + \log_3(x - 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3(x^2 - 3x - 1) &= \log_3[3(x - 2)] \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 3x - 6 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \end{aligned}$$

Portanto,  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 5$

Verificação:

Para  $x = 1$ , temos  $x^2 - 3x - 1 < 0$  e  $x - 2 < 0$ .

Para  $x = 5$ , temos  $x^2 - 3x - 1 > 0$  e  $x - 2 > 0$ .

Portanto,  $S = \{5\}$ .

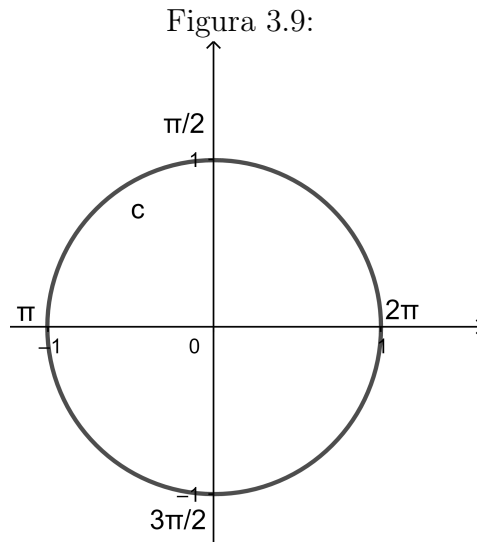
■

## 3.6 Funções Trigonômétricas

Muitos fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico, ou periódico, podem ser modelados por funções trigonométricas. As funções Seno, Cosseno e Tangente surgem com frequência na modelagem matemática de fenômenos naturais que apresentam periodicidade (LEONARDO, 2013).

**Definição 3.23.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função periódica quando existe um número real  $p$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(x + p)$ .

**Definição 3.24.** O ciclo trigonométrico é a circunferência unitária (raio igual a 1) do plano cartesiano, com o centro na origem  $(0, 0)$ . O ponto  $A = (1, 0)$  é a origem de todos os arcos (ângulos) e a circunferência  $C$  é orientada com sentido positivo (anti-horário).



A Figura 3.9 ilustra o ciclo trigonométrico. Para medir arcos e ângulos usamos graus e radianos. Uma circunferência mede  $360^\circ$  ou  $2\pi \text{ rad}$ .

Note que, para todo ponto  $(x, y) \in C$  tem-se  $-1 \leq x \leq 1$  e  $-1 \leq y \leq 1$ .

### 3.6.1 A Função Seno

Seja  $P$  a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente a medida  $x$ , Figura 3.10. Considerando a projeção de  $P$  no eixo  $y$ , a ordenada  $y_p$  do ponto  $P$  é o seno do arco de medida  $x$  (LEONARDO, 2013).

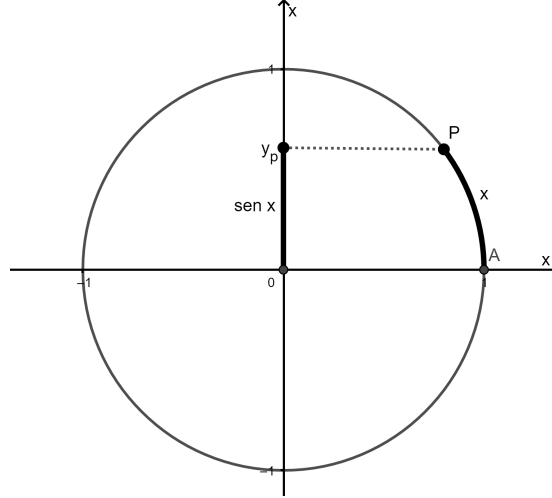
A função seno é a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa cada  $x$  a  $y_p$ , isto é,  $f(x) = \sin x$ .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = \sin x.$$

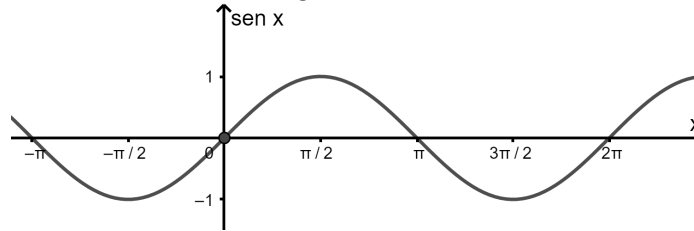
A  $f(x) = \sin x$  é periódica de período  $2\pi$ , pois  $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x = \sin(x + 2\pi)$ , isto é, para valores de  $x$  maiores que  $2\pi$ , o seno de  $x$  assume os mesmos valores da 1ª volta do ciclo.

Figura 3.10:



Por definição, o domínio são os reais e a imagem é o intervalo  $[-1,1]$ .  
A Figura 3.11 ilustra o gráfico da  $f(x) = \sin x$ .

Figura 3.11:



A função é positiva para  $x$  nos intervalos  $(0, \pi)$ ,  $(2\pi, 3\pi) \dots$ , e negativa para  $x$  em  $(-\pi, 0)$ ,  $(\pi, 2\pi) \dots$ .

Temos ainda  $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  e  $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ .

### 3.6.2 A Função Cosseno

Seja  $P$  a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente a  $x$ , Figura 3.12. Considerando a projeção de  $P$  no eixo  $x$ , a abscissa  $x_p$  do ponto  $P$  é o cosseno do arco de medida de  $x$  (LEONARDO, 2013).

A função cosseno é a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa cada  $x$  a  $x_p$ , isto é,  $f(x) = \cos x$ .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = \cos x.$$

A  $f(x) = \cos x$  é periódica de período  $2\pi$ , pois  $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x = \cos(x + 2\pi)$ , isto é, para valores de  $x$  maiores que  $2\pi$ , o cosseno de  $x$  assume os mesmos valores da 1ª volta do ciclo.

Por definição, o domínio são os reais e a imagem é o intervalo  $[-1,1]$ .



Figura 3.12:

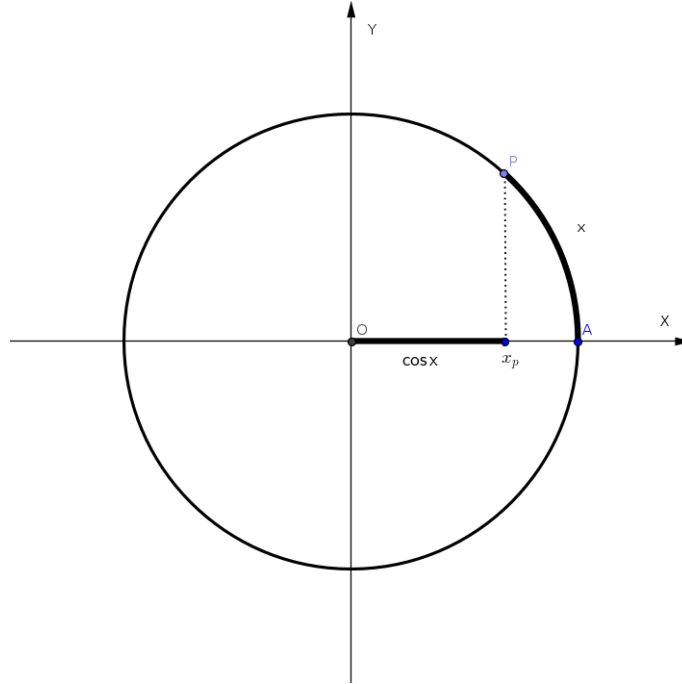
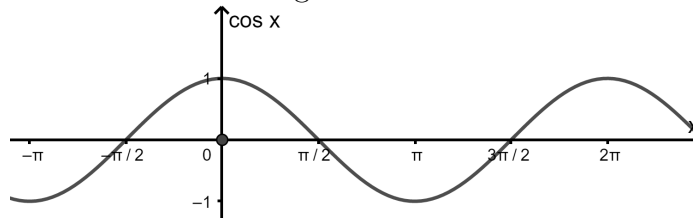


Figura 3.13:



A Figura 3.13 ilustra o gráfico da  $f(x) = \cos x$ .

A função é positiva para  $x$  nos intervalos  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \dots$ , e negativa para  $x$  em  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ,  $(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}) \dots$ .

Temos ainda  $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$ ,  $\cos \pi = -1$  e  $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$ .

Das funções seno e cosseno derivam as outras funções trigonométricas, chamadas tangente, cotangente, secante e cossecante. Sendo definidas, respectivamente, por:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}; \sec x = \frac{1}{\cos x}; \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

### 3.6.3 Relações Trigonômétricas

Conhecidos os valores de seno, cosseno e da tangente, podemos encontrar diversos outros valores das funções trigonométricas realizando operações de adição e subtração com esses arcos.

1. Cosseno da soma:  $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ ;

2. Cosseno da diferença:  $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ ;
3. Seno da soma:  $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$ ;
4. Seno da diferença:  $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$ ;
5. Relação Fundamental da Trigonometria:  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ .

**Definição 3.25.** *Toda equação em que aparecem razões trigonométricas, com arco de medida desconhecida, é chamada de equação trigonométrica (LEONARDO, 2013).*

Por exemplo:  $\sin x = 0,5$ ;  $\cos x = 0$ .

**Exemplo 3.26.** *Determine todas as raízes da função  $f(x) = \sin \frac{x}{3} + 1$ .*

**Solução:** Determinar as raízes dessa função, equivale a resolver a equação trigonométrica  $\sin \frac{x}{3} + 1 = 0$ .

$$\sin \frac{x}{3} + 1 = 0 \Rightarrow \sin \frac{x}{3} = -1$$

Agora sabemos que o arco cujo seno é -1 mede  $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Então,

$$\frac{x}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2} + 6k\pi.$$

Portanto,  $x = \frac{9\pi}{2} + 6k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , são todas as raízes da função  $f$ .

■

# Capítulo 4

## As Inequações

**Definição 4.1.** Dadas as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  cujos domínios são definidos em  $\mathbb{R}$ , chamamos de inequação na incógnita  $x$  a qualquer das sentenças abertas, abaixo (IEZZI,1977):

$$f(x) > g(x); \quad f(x) < g(x); \quad f(x) \geq g(x); \quad f(x) \leq g(x);$$

Exemplos de inequações:

1)  $2x - 4 > x$  é uma inequação em que  $f(x) = 2x - 4$  e  $g(x) = x$ ;

2)  $3x - 5 < 2$  é uma inequação em que  $f(x) = 3x - 5$  e  $g(x) = 2$ .

Uma inequação que envolve funções polinomiais, é chamada de inequação polinomial. As inequações que envolvem funções trigonométricas, são as inequações trigonométricas, e assim por diante.

Para resolvê-las são utilizados procedimentos similares aos usados nas equações.

O número real  $x_0$  é uma solução da inequação  $f(x) > g(x)$  se, e somente se, é verdadeira a sentença  $f(x_0) > g(x_0)$ .

Ao conjunto  $S$  de todos os números reais  $x$  tais que  $f(x) > g(x)$  é uma sentença verdadeira, chamamos de conjunto-solução da inequação (IEZZI,1977). Para determinar tal conjunto é essencial conhecer as propriedades de desigualdades e as funções envolvidas. Portanto, resolver uma inequação significa encontrar o seu conjunto-solução.

**Definição 4.2.** Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  duas funções. As inequações

$$f(x).g(x) > 0; \quad f(x).g(x) < 0; \quad f(x).g(x) \leq 0; \quad f(x).g(x) \geq 0;$$

são denominadas inequações-produto, e as inequações

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0; \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0; \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0; \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0;$$

são denominadas inequações-quociente.

Nas seções deste capítulo veremos dois métodos para resolver inequações que envolvem produtos e/ou quocientes de funções, e como podemos aplicá-los de acordo com a situação.

A seguir, veremos alguns exemplos de inequações.

**Exemplo 4.3.** *Determine os valores reais de  $x$  tais que  $f(x) = 8x - 4$  seja positiva ou igual a zero.*

**Solução:** Neste caso, temos que resolver a inequação, do 1º grau,  $8x - 4 \geq 0$ .

$$8x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 8x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{8} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Logo o conjunto-solução dessa inequação é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

■

**Exemplo 4.4.** *Determine o conjunto-solução da inequação do 2º grau  $x^2 - 3x + 2 > 0$ .*

**Solução:** O primeiro passo é encontrar as raízes da função. Sendo assim, resolvendo a equação  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , obtemos 1 e 2 como raízes. Então,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Dessa forma, devemos ter  $(x - 1)(x - 2) > 0$ . Para isso  $(x - 1)$  e  $(x - 2)$  precisam ser ambos positivos ou ambos negativos.

Para ambos positivos, temos:  $x > 1$  e  $x > 2$ . Então  $x > 2$ .

Para ambos negativos, temos que  $x < 1$  e  $x < 2$ . Logo  $x < 1$ .

Portanto, o conjunto-solução é dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ ou } x > 2\} = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

■

**Exemplo 4.5.** *Determine os valores reais de  $x$  tais que  $f(x) = 2x^2 - 2x + 5$  seja positiva.*

**Solução:** Primeiramente, temos que verificar se a função possui raízes reais. Calculando o discriminante  $\Delta$ , da equação  $2x^2 - 2x + 5 = 0$ , obtemos  $\Delta = (-2)^2 - (4).(2).(5) = 4 - 40 = -36 < 0$ . Logo, a função não possui raízes reais. Sendo assim, pela Proposição 3.12, da página 21, o sinal da função  $f(x) = 2x^2 - 2x + 5$  é igual ao sinal do coeficiente líder  $2 > 0$ . Assim temos que  $2x^2 - 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Portanto o conjunto-solução da inequação é o conjunto  $\mathbb{R}$ .

■

**Exemplo 4.6.** *Resolva a inequação exponencial  $2^{x+7} < 32$ .*

**Solução:** Para resolver essa inequação usaremos que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = 2^x$ , é crescente, e portanto preserva desigualdades, isto é,  $2^{x_1} < 2^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2$ . Logo, teremos:

$$2^{x+7} < 32 \Rightarrow 2^{x+7} < 2^5 \Rightarrow x + 7 < 5 \Rightarrow x < -2$$

Portanto o conjunto-solução dessa inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\} = (-\infty, -2)$$

■

**Exemplo 4.7.** *Resolva a inequação logarítmica  $\log_2(x+1) > \log_2 6$ .*

**Solução:** Primeiro observamos que  $x+1 > 0$ , isto é,  $x > -1$ , pois o domínio da função  $f(x) = \log_2 x$ , é o conjunto  $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ . Além disso essa função é crescente, portanto preserva desigualdades. Assim temos que:

$$\log_2(x+1) > \log_2 6 \Rightarrow x+1 > 6 \Rightarrow x > 5$$

Assim o conjunto-solução dessa inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x > 5 \text{ e } x > -1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\} = (5, +\infty).$$

■

**Exemplo 4.8.** *Resolva a inequação trigonométrica  $\sin x > \frac{1}{2}$ , com  $0 \leq x \leq 2\pi$ .*

**Solução:** Para resolver essa inequação se faz necessário que conheçamos onde a função  $f(x) = \sin x$ , é crescente ou decrescente, e as soluções da equação  $\sin x = \frac{1}{2}$ , no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

As únicas soluções da equação  $\sin x = \frac{1}{2}$ , no intervalo considerado, são os números  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{5\pi}{6}$ . Além disso, é sabido que a função  $f(x) = \sin x$ , é crescente no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  e decrescente no intervalo  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Disso, é possível concluir que os números que satisfazem a inequação acima são aqueles que estão entre  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{5\pi}{6}$ . Sendo assim, o conjunto-solução dessa inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\} = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

■

**Exemplo 4.9.** *Resolva a inequação  $2 \cdot \cos x > -1$ , com  $0 \leq x \leq 2\pi$ .*

**Solução:** Para resolver essa inequação se faz necessário que conheçamos onde a função  $g(x) = \cos x$ , é crescente ou decrescente, e as soluções da equação  $2 \cdot \cos x > -1$ , no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

$$2 \cdot \cos x > -1 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2}$$

As únicas soluções da equação  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , no intervalo considerado, são os números  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$ . Além disso, é sabido que a função  $g(x) = \cos x$ , é decrescente no intervalo  $[0, \pi]$  e crescente no intervalo  $[\pi, 2\pi]$ . Disso, é possível concluir que os números que satisfazem a inequação acima são aqueles que estão entre 0 e  $\frac{2\pi}{3}$ , e os que estão entre  $\frac{4\pi}{3}$  e  $2\pi$ . Sendo assim, o conjunto-solução dessa inequação é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \right\} = \left[ 0, \frac{2\pi}{3} \right) \cup \left( \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right].$$

■

## 4.1 O Método da Análise do Sinal

Uma inequação pode ser composta por produtos ou quocientes de vários tipos de funções. O método da análise do sinal trata uma inequação-produto ou uma inequação-quociente como inequações separadas, de tal forma que possamos estudar os seus sinais. Portanto, este método consiste em estudar o comportamento de cada função através de seu gráfico e fazer a análise da variação de sinal, dependendo do caso, a partir daí, utilizar um quadro de sinais para realizar as devidas comparações. Isto é, este processo se resume a análise da função em associação com seu gráfico.

Neste caso, devemos seguir os seguintes passos para obter o conjunto-solução procurado: achar as raízes de todas as funções, fazer a análise dos sinais e determinar a solução pela intersecção do estudo de sinal.

É possível resolver qualquer inequação do primeiro grau por meio da análise de sinal. Primeiramente, encontra-se a raiz, verifica-se o sinal do coeficiente líder  $a$ , representa-se a função na reta e estuda-se o seu sinal conforme o caso. Em seguida, através de um quadro de sinais composto por retas paralelas, comparamos os sinais referentes a cada intervalo, intersectando-os de acordo com a regra de multiplicação de sinais.

Para resolver inequações do 2º grau, funciona da mesma maneira, mas, neste caso, devemos atentar para o discriminante  $\Delta$  da função e as raízes, caso existam. É necessário saber o sinal do coeficiente  $a$  que representa a posição da concavidade da parábola.

Quando nos deparamos com situações em que as inequações envolvem funções polinomiais de grau maior que 2, encontramos suas raízes, usando o teorema das raízes racionais, quando aplicável, e o dispositivo de Briott-Ruffini, por exemplo, para fatorar, se possível, em fatores polinomiais de grau  $\leq 2$ .

**Observação 4.10.** *No caso de inequações-quociente, a função expressa no denominador não pode ser igual a zero. Dessa forma, adotamos valores maiores ou menores que zero.*

Em relação a inequações envolvendo funções não polinomiais, estudamos o sinal de cada função, levando em conta a definição e as propriedades de cada uma. Neste caso, não é uma tarefa tão prática.

A seguir veremos alguns exemplos de como aplicar o Método da Análise do Sinal para solucionar inequações.

**Exemplo 4.11.** Resolva a inequação  $(x - 2)(1 - 2x) \leq 0$ .

**Solução:** Vamos estudar os sinais dos fatores lineares separadamente.

Para  $f(x) = x - 2$ , a raiz é 2, e o coeficiente líder  $a = 1 > 0$ . Logo a função é crescente. Veja figura 4.1.

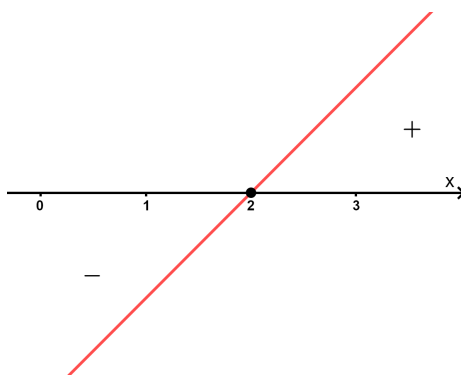


Figura 4.1:  $f(x) = x - 2$

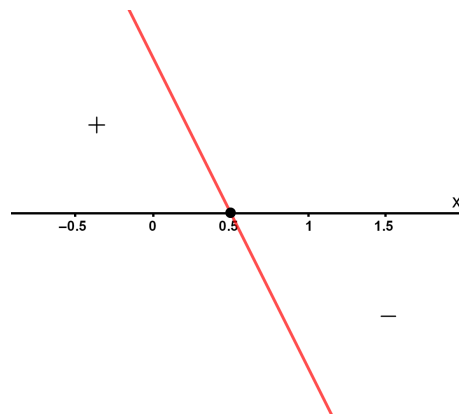


Figura 4.2:  $g(x) = 1 - 2x$

Para  $g(x) = 1 - 2x$ , a raiz é  $\frac{1}{2}$ , e o coeficiente líder  $a = -2 < 0$ . Logo a função é decrescente. Veja figura 4.2.

Então, usamos um quadro de sinais para determinar o conjunto-solução. Observe a Figura 4.3:

Figura 4.3:

|            |   |               |   |     |   |
|------------|---|---------------|---|-----|---|
|            |   | $\frac{1}{2}$ |   | $2$ |   |
| $f(x)$     | - |               | - |     | + |
| $g(x)$     | + |               | - |     | - |
| $f(x)g(x)$ | - |               | + |     | - |
|            |   | $\frac{1}{2}$ |   | $2$ |   |

Logo, o conjunto-solução dessa inequação é :

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty).$$

■

**Exemplo 4.12.** Resolva a inequação  $x^2 - 3x + 2 < 0$ .

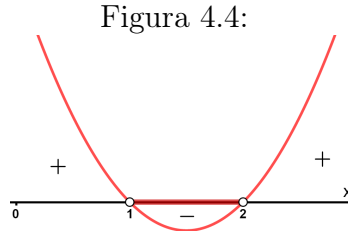
Resolver a inequação em questão, significa determinar os valores reais de  $x$  para os quais a função  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  assume valores negativos.

Vamos primeiro achar as raízes da equação  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2.$$

Como o coeficiente líder  $a = 1 > 0$ , o gráfico da função  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  tem a concavidade para cima. Observe a figura 4.4:

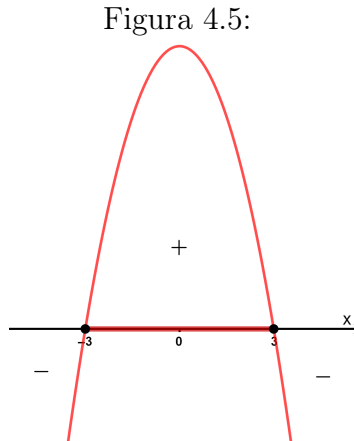


Como devemos ter  $f(x) < 0$ , o gráfico nos mostra que isso ocorre para os valores de  $x$  que estão entre as raízes. Disso obtemos que o conjunto-solução dessa inequação é o conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\} = (1, 2).$$

**Exemplo 4.13.** Resolva a inequação  $-x^2 + 9 \leq 0$ .

**Solução:** Neste caso, queremos que a função  $f(x) = -x^2 + 9$  assuma valores positivos ou iguais a zero. As raízes da equação  $-x^2 + 9 = 0$  são  $-3$  e  $3$ , e o coeficiente líder da função quadrática  $f(x) = -x^2 + 9$  é  $-1 < 0$ . Portanto o gráfico dessa função quadrática tem concavidade para baixo. Observe a Figura 4.5.



Como queremos  $f(x) \geq 0$ , o gráfico nos mostra que isso ocorre para os valores de  $x$  que estão entre as raízes. Disso obtemos que o conjunto-solução dessa inequação é o conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3].$$

■

**Exemplo 4.14.** Determine o conjunto solução da inequação  $x^3 - 13x + 12 > 0$ .



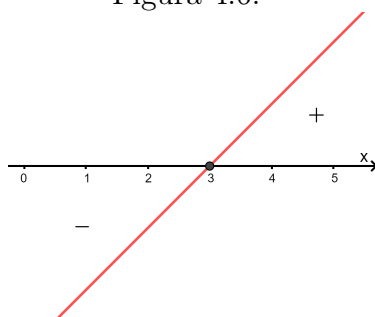
**Solução:** Primeiro, vamos encontrar as raízes de  $h(x) = x^3 - 13x + 12$ . Pelo teorema 3.16, da página 25 (teorema das raízes racionais), encontramos os possíveis valores para uma das raízes e concluímos que 3 é uma raiz.

Então, por Briott-Ruffini obtemos que  $x^3 - 13x + 12 = (x - 3)(x^2 + 3x - 4)$ .

Fazendo o estudo do sinal de cada função, obtemos:

Para  $f(x) = x - 3$ , a raiz é 3, e o coeficiente líder é  $a = 1 > 0$ . Logo a função é crescente. Observe a Figura 4.6

Figura 4.6:



Para  $g(x) = x^2 + 3x - 4$ , as raízes são  $-4$  e  $1$ , e a concavidade do gráfico é para cima. Veja a Figura 4.7.

Figura 4.7:

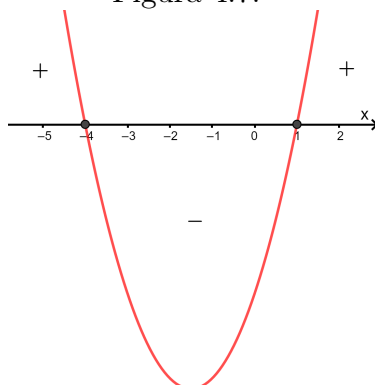
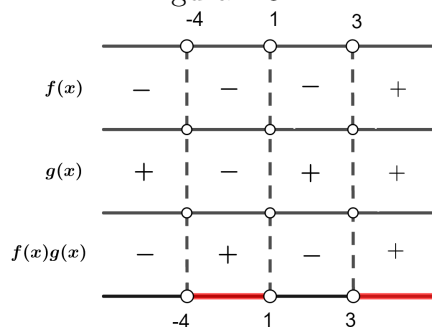


Figura 4.8:



A Figura 4.8 mostra um quadro, onde figuram os sinais das funções  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x) = f(x).g(x)$ . Pelas informações do quadro, obtemos que o conjunto-solução da inequação  $x^3 - 13x + 12 > 0$  é o conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 1 \text{ ou } x > 3\} = (-4, 1) \cup (3, +\infty).$$

■

**Exemplo 4.15.** *Exemplo: Resolva a seguinte inequação*

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 12} < 0.$$

**Solução:** Vamos achar as raízes das funções separadamente. Vamos começar com as raízes da função  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ . De acordo com o teorema 3.16, da página 25 (teorema das raízes racionais), as possíveis raízes de  $f(x)$  são os números:  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ . Determinando a imagem pela função  $f$ , de cada um desses números, verificamos, facilmente que 1 é raiz.

Utilizando o dispositivo de Briott-Ruffini, para dividir  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$  por  $x - 1$ , obtemos:

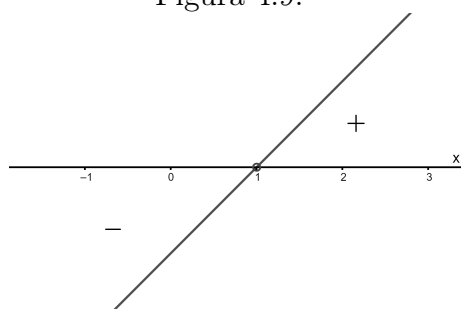
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array}$$

Logo,  $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 8)$ .

Resolvendo a equação  $x^2 - 2x - 8 = 0$ , obtemos  $-2$  e  $4$  como raízes.

Segue, agora, o resultado das análises de sinal de cada fator deste produto de polinômios, ilustrada nas figuras 4.9 e 4.10, respectivamente.

Figura 4.9:



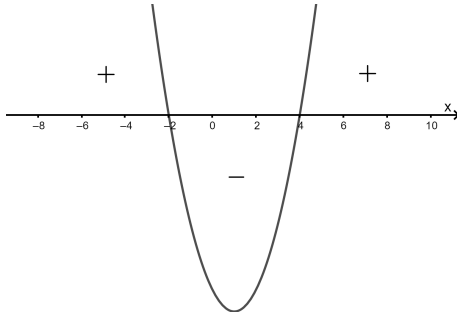


Figura 4.10:

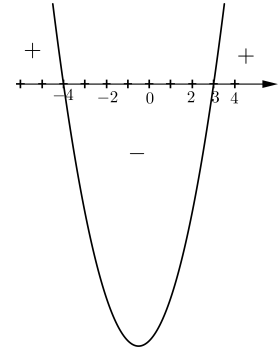


Figura 4.11:

Já a função  $g(x) = x^2 + x - 12$ , é uma função quadrática, tendo  $-4$  e  $3$  como raízes, e seu gráfico é uma parábola com concavidade para cima. Veja a figura 4.11.

Figura 4.12:

|   |           |      |      |     |     |     |           |
|---|-----------|------|------|-----|-----|-----|-----------|
|   | $-\infty$ | $-4$ | $-2$ | $1$ | $3$ | $4$ | $+\infty$ |
| $(x - 1)$   |           | —    | —    | —   | +   | +   | +         |
| $(x^2 - 2x - 8)$  |           | +    | +    | —   | —   | —   | +         |
| $(x^2 + x - 12)$  |           | +    | —    | —   | —   | +   | +         |
| $\left(\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 12}\right)$ |           | —    | +    | —   | +   | —   | +         |
|   | $-\infty$ | $-4$ | $-2$ | $1$ | $3$ | $4$ | $+\infty$ |

A Figura 4.12 mostra um quadro, onde figuram os sinais das funções  $g(x) = x - 1$ ,  $h(x) = x^2 - 2x - 8$ ,  $m(x) = x^2 + x - 12$  e  $q(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 12}$ . Pelas informações do quadro, obtemos que o conjunto-solução da inequação  $\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 12} < 0$  é o conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} : x < -4 \text{ ou } -2 < x < 1 \text{ ou } 3 < x < 4\} = (-\infty, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, 4).$$

■

## 4.2 O Lema da Permanência do Sinal

Na seção anterior, trabalhamos com o Método da Análise do Sinal, aplicando-o apenas nas inequações que envolviam funções polinomiais, ou seja, estudamos o comportamento destas funções e analisamos os seus sinais. Portanto, é compreensível a alta disseminação deste método em todos os níveis escolares; é válido e prático, nestas situações.

Agora, se tivermos que utilizar o Método da Análise do Sinal para trabalhar com inequações que envolvam vários produtos e/ou quocientes de funções trigonométricas ou qualquer outra função elementar, não será uma tarefa tão rápida e simples, dependendo do caso. Então, para resolver este tipo de inequação vamos utilizar o Lema da Permanência do Sinal.

Uma situação merece destaque: se uma função possui  $n$  raízes reais, será que o sinal da função é constante entre intervalos cujas extremidades são raízes consecutivas? Encontramos esta resposta com o Lema da permanência do sinal.

A seguir apresentaremos um resultado importante da teoria de funções contínuas: o Teorema do Valor Intermediário. Através deste resultado essencial, conseguimos demonstrar este Lema.

**Teorema 4.16.** *(Teorema do Valor Intermediário) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e seja  $d$  um número entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Então existe pelo menos um número  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = d$ .*

Quando dizemos que  $x$  é um número entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , isso inclui duas possibilidades:  $f(a) < d < f(b)$  ou  $f(b) < d < f(a)$ .

**Observação 4.17.** *A demonstração deste teorema será omitida, e pode ser encontrada em diversos livros de cálculo. No entanto, ele é peça fundamental para o próximo resultado.*

Do estudo dos sinais realizados nas inequações mostradas nos capítulos anteriores, podemos perceber que, se uma função assume o sinal positivo, por exemplo, num certo ponto, esse sinal permanece o mesmo em torno deste ponto. Esta permanência de sinal é uma propriedade que se aplica a todas as funções contínuas, quando definidas em intervalos.

**Lema 4.18.** *(Lema da Permanência do Sinal) Seja  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  e seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua no intervalo  $I$ , tal que  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Então o sinal de  $f(x)$  é constante em  $I$ , ou seja,  $f(x) < 0$  ou  $f(x) > 0$  para todo  $x \in I$ .*

### Demonstração:

Suponhamos que existam  $a$  e  $b$  no intervalo  $I$  tais que  $f(a)$  e  $f(b)$  possuam sinais diferentes. Assim, ou  $f(a) < 0 < f(b)$  ou  $f(b) < 0 < f(a)$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = 0$ , o que é uma contradição, pois, por hipótese,  $f(x) \neq 0$ , para todo  $x \in I$ . ■

O Lema da permanência do sinal para resolver inequações funciona da seguinte forma:

Suponhamos que queremos resolver a inequação  $f(x) > 0$ , onde  $f$  é uma função contínua, cujo domínio é um intervalo  $I$  com extremidades  $a$  e  $b$ , onde  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Suponhamos que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são todas as raízes de  $f$ . Então dividimos o intervalo  $I$  nos subintervalos  $[a, x_1]$  ou  $(a, x_1]$ , conforme  $a$  esteja ou não em  $I$ , e nos subintervalos  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-1}, x_n]$  e  $[x_n, b]$  ou  $[x_n, b)$ , conforme  $b$  esteja ou não em  $I$ . Em cada um desses subintervalos escolhemos um número que não seja uma de suas extremidades. O sinal da função naquele número escolhido do subintervalo é igual ao sinal da função em qualquer outro elemento do subintervalo, exceto possivelmente nas extremidades. O mesmo procedimento vale para as inequações do tipo  $f(x) < 0$  ou  $f(x) \leq 0$  ou  $f(x) \geq 0$ .

**Exemplo 4.19.** Usando o Lema da Permanência do Sinal, resolva a inequação

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 12} < 0.$$

**Solução:** Esse exemplo já foi feito na seção anterior pelo método da análise do sinal (Exemplo 4.15 da página 41). Usando o teorema 3.16, da página 25 (teorema das raízes racionais), o dispositivo de Briott-Ruffini, da página 23, e o método de resolução da equação do segundo grau, obtemos que as raízes de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$  são  $-2$ ,  $1$  e  $4$ , e as raízes de  $g(x) = x^2 + x - 12$  são  $-4$  e  $3$ . Além disso a função  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  é contínua nos intervalos  $(-\infty, -4)$ ,  $(-4, 3)$  e  $(3, +\infty)$ . Observe que  $-2$ ,  $1$  e  $4$ , que são todas as raízes de  $f$ , são também todas as raízes de  $h$ . Assim a função  $h$  é contínua e não-nula nos seguintes intervalos:  $(-\infty, -4)$ ,  $(-4, -2)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, 4)$  e  $(4, +\infty)$ . Agora usaremos o Lema da Permanência do Sinal para verificar o sinal de  $h$  em cada um desses intervalos.

$$-5 \in (-\infty, -4) \text{ e } h(-5) \approx -20,25 < 0. \text{ Logo } h(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -4).$$

$$-3 \in (-4, -2) \text{ e } h(-3) \approx 4,67 > 0. \text{ Logo } h(x) > 0 \quad \forall x \in (-4, -2).$$

$$0 \in (-2, 1) \text{ e } h(0) \approx -0,67 < 0. \text{ Logo } h(x) < 0 \quad \forall x \in (-2, 1).$$

$$2 \in (1, 3) \text{ e } h(2) \approx 1,33 > 0. \text{ Logo } h(x) > 0 \quad \forall x \in (1, 3).$$

$$7/2 \in (3, 4) \text{ e } h(7/2) \approx -1,83 < 0. \text{ Logo } h(x) < 0 \quad \forall x \in (3, 4).$$

$$5 \in (4, +\infty) \text{ e } h(5) \approx 1,56 > 0. \text{ Logo } h(x) > 0 \quad \forall x \in (4, +\infty).$$

Das informações obtidas acima concluímos que o conjunto-solução da inequação

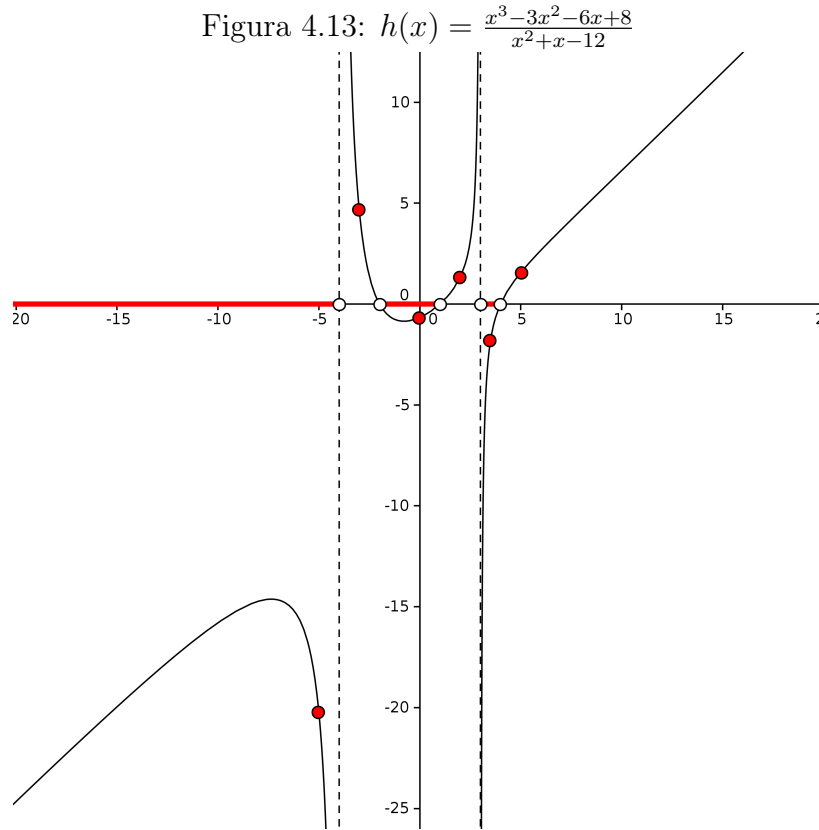
$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 12} < 0$$

é o conjunto

$$S = (-\infty, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, 4).$$

Veja figura 4.13.

■



**Exemplo 4.20.** Seja  $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = (x^2 - 1) \cdot \sin x$ . Use o Lema da Permanência do Sinal para resolver a inequação  $h(x) \geq 0$ .

**Solução:** Primeiro observemos que a função  $h$  é contínua em todo o seu domínio  $[-\pi, \pi]$ , pois é o produto das funções  $f(x) = x^2 - 1$  e  $g(x) = \sin x$ , ambas contínuas nesse intervalo. Além disso temos que os números  $-1$  e  $1$  são raízes de  $f$ , enquanto  $-\pi$ ,  $0$  e  $\pi$  são raízes de  $g$ . Assim obtemos que os números  $-\pi$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  e  $\pi$  são todas as raízes da função  $h$ . Consequentemente a função  $h$  é contínua e não-nula nos seguintes intervalos:  $(-\pi, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, \pi)$ . Usando o Lema da Permanência do Sinal para verificar o sinal de  $h$  em cada um desses intervalos temos:

$-\pi/2 \in (-\pi, -1)$  e  $h(-\pi/2) \approx -1,47 < 0$ . Logo  $h(x) < 0 \quad \forall x \in (-\pi, -1)$ .

$-1/2 \in (-1, 0)$  e  $h(-1/2) \approx 0,36 > 0$ . Logo  $h(x) > 0 \quad \forall x \in (-1, 0)$ .

$1/2 \in (0, 1)$  e  $h(1/2) \approx -0,36 < 0$ . Logo  $h(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ .

$\pi/2 \in (1, \pi)$  e  $h(\pi/2) \approx 1,47 > 0$ . Logo  $h(x) > 0 \quad \forall x \in (1, \pi)$ .

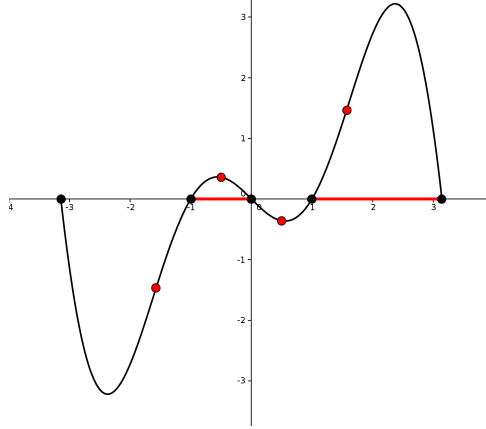
Das informações obtidas acima concluímos que o conjunto-solução da inequação  $h(x) = (x^2 - 1) \cdot \sin x \geq 0$  é o conjunto  $S = [-1, 0] \cup [1, \pi]$ . Veja a figura 4.14 .

■

**Exemplo 4.21.** Use o Lema da Permanência do Sinal para resolver a inequação

$$\frac{x^2 - 3x}{\ln x} < 0.$$

Figura 4.14:  $h(x) = (x^2 - 1) \cdot \sin x$



**Solução:** Primeiro observemos que o domínio da função  $h(x) = \frac{x^2 - 3x}{\ln x}$  é o conjunto  $S = \mathbb{R}^+ - \{1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , e que a função  $h$  é contínua em todos os pontos do seu domínio. Além disso observamos que o número 3 é a única raiz de  $h$  no domínio considerado. Portanto a função  $h$  é contínua e não-nula nos seguintes intervalos:  $(0, 1)$ ,  $(1, 3)$  e  $(3, +\infty)$ . Usando o Lema da Permanência do Sinal para verificar o sinal de  $h$  em cada um desses intervalos temos:

$1/2 \in (0, 1)$  e  $h(1/2) \approx 1,8 > 0$ . Logo  $h(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ .

$2 \in (1, 3)$  e  $h(2) \approx -2,89 < 0$ . Logo  $h(x) < 0 \quad \forall x \in (1, 3)$ .

$4 \in (3, +\infty)$  e  $h(4) \approx 2,89 > 0$ . Logo  $h(x) > 0 \quad \forall x \in (3, +\infty)$ .

Das informações obtidas acima, concluímos que o conjunto-solução da inequação

$$\frac{x^2 - 3x}{\ln x} < 0$$

é o conjunto  $S = (1, 3)$ . Veja a figura 4.15 .

■

**Exemplo 4.22.** Use o Lema da Permanência do Sinal para resolver a inequação

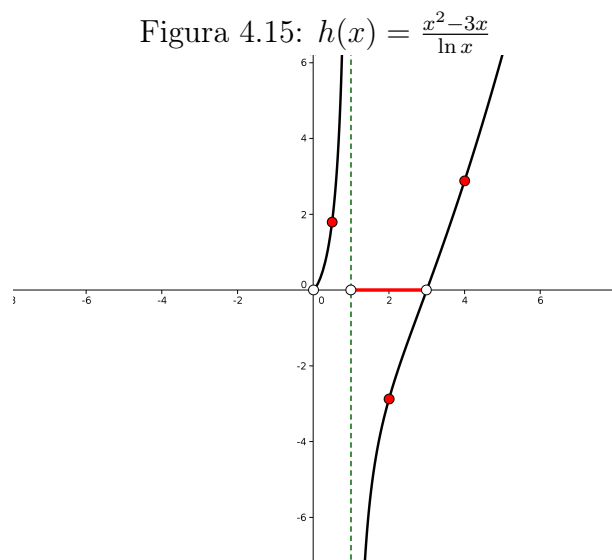
$$(x^2 - 4) \ln(x^2 + 1) < 0$$

**Solução:** Primeiro observemos que a função  $h(x) = (x^2 - 4) \ln(x^2 + 1)$  está definida e é contínua em toda a reta, e que suas raízes são os números  $-2, 0$  e  $2$ . Assim temos que a função  $h$  é contínua e não-nula nos seguintes intervalos:  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(0, 2)$  e  $(2, +\infty)$ . Usando o Lema da Permanência do Sinal para verificar o sinal de  $h$  em cada um desses intervalos temos:

$-2,5 \in (-\infty, -2)$  e  $h(-2,5) \approx 4,46 > 0$ . Logo  $h(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, -2)$ .

$-1 \in (-2, 0)$  e  $h(-1) \approx -2,08 < 0$ . Logo  $h(x) < 0 \quad \forall x \in (-2, 0)$ .

$1 \in (0, 2)$  e  $h(1) \approx -2,08 < 0$ . Logo  $h(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 2)$ .

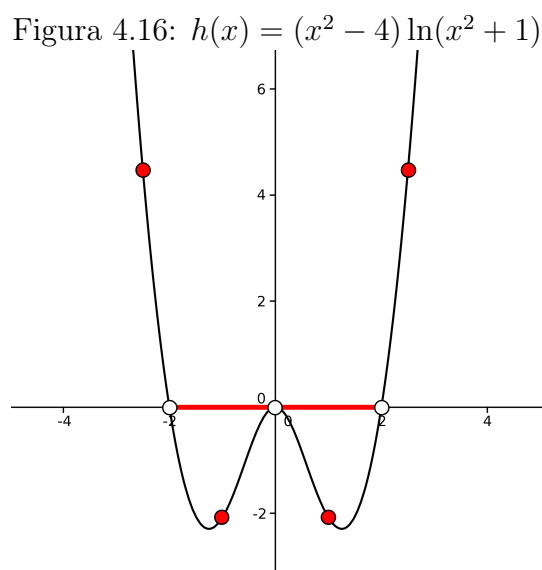


$2, 5 \in (2, \infty)$  e  $h(2, 5) \approx 4, 46 > 0$ . Logo  $h(x) > 0 \quad \forall x \in (2, \infty)$ .

Das informações obtidas acima, concluímos que o conjunto-solução da inequação

$$(x^2 - 4) \ln(x^2 + 1) < 0$$

é o conjunto  $S = (-2, 0) \cup (0, 2)$ . Veja a figura 4.16 .



■



## Referências Bibliográficas

- [1] Lima, Elon Lages.: *A matemática do ensino médio - vol 1, vol 3*. 9<sup>a</sup> ed., Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [2] Iezze, Gelson.: *Fundamentos da matemática elementar: conjuntos e funções - vol 1*. 3<sup>a</sup> ed., São Paulo, Atual, 1977.
- [3] Dante, Luiz Roberto.: *Matemática: contextos e aplicações*. vol 1. 2<sup>a</sup> ed., São Paulo, Ática, 2013.
- [4] Leonardo, Fábio Martins de.: *Matemática: Conexões com a matemática - vol 2, vol 3*. 2<sup>a</sup> ed., São Paulo, Moderna, 2013.
- [5] Flemming, Diva Marília.: *Cálculo a: Funções, limites, derivação e integração*. 6<sup>a</sup> ed., Florianópolis, Pearson, 2006.

# Apêndice A

## O Conjunto dos Números Complexos

Pode parecer frustrante o fato de que uma função com coeficientes reais pode não possuir raízes reais. Por exemplo, quando tentamos aplicar a fórmula de Bháskara à equação  $x^2 + 1 = 0$ , encontramos  $\Delta = -4$  e, conseqüentemente, se fosse possível escrever as suas raízes em  $\mathbb{R}$ , elas se escreveriam como:  $x_1 = -\frac{\sqrt{-4}}{2}$  e  $x_2 = \frac{\sqrt{-4}}{2}$ .

Logo, estas raízes não fazem sentido em  $\mathbb{R}$ , pois não existe número cujo quadrado resulte em um número negativo. Por definição o produto entre dois números reais, é sempre positivo. Isto é, não é possível extrair a raiz quadrada de  $-4$  em  $\mathbb{R}$ .

A resolução de equações sempre representou um dos principais interesses dos matemáticos, desde a Antiguidade até os dias de hoje. Babilônios, gregos, egípcios e hindus já conheciam alguns casos particulares de equações do 2º grau. Para esses matemáticos, não havia dificuldade quando aparecia a raiz quadrada de um número negativo, pois as equações eram usadas para solucionar problemas concretos, caso surgisse uma raiz quadrada negativa, o problema era considerado sem solução (LEONARDO, 2013).

Porém, por volta do século XVI esse ponto de vista começou a mudar com os italianos que estudavam equações do 3º grau, onde aparecem raízes de números negativos, e utilizaram o termo imaginário para as raízes que não são reais. Mas, os matemáticos recusavam a ideia da existência de um novo tipo de número.

A ampliação dos estudos por outros matemáticos e a descoberta da possibilidade de aplicação em outras áreas tornam os números complexos umas das mais importantes descobertas da Matemática.

O matemático alemão Leonard Euler, em 1777, utilizou pela primeira vez a letra  $i$  para simbolizar  $\sqrt{-1}$ . O número  $i$  é chamado de unidade imaginária (LEONARDO, 2013).

Dessa forma, com o surgimento desses novos números podemos encontrar raízes de funções que não têm solução no conjunto dos números reais.

**Exemplo A.1.** Determine as raízes da função  $f(x) = x^2 + 9$ .

**Solução:** Vamos resolver a equação do 2º grau  $x^2 + 9 = 0$ . Note que,

$$x^2 = -9.$$

Por definição, não existe  $x$  real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo. Porém, considerando que existe um número  $i$ , não real, tal que  $i = \sqrt{-1}$ , temos:

$$x^2 = -9 \Rightarrow x^2 = 9 \cdot (-1) \Rightarrow x^2 = 9i^2 \Rightarrow x = \pm 3i.$$

Logo,  $x = -3i$  ou  $x = 3i$  e  $S = \{-3i, 3i\}$ . ■

Chamamos tais números de Números Complexos, graças aos trabalhos desenvolvidos pelo Matemático alemão Carl Friedrich Gauss no século XIX.

Por exemplo, são números complexos  $2 - 3i$ ,  $3 + i$  e  $-3i$ .

**Definição A.2.** O conjunto dos números complexos, denotado por  $\mathbb{C}$ , é o conjunto das expressões

$$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$$

Onde  $i$  satisfaz  $i^2 = -1$

Logo, um número complexo é todo número que pode ser escrito na forma  $z = a + bi$ , em que  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i$  é a unidade imaginária.

Os coeficientes  $a$  e  $b$  são chamados de parte real e parte imaginária de  $z$ , respectivamente.

Com isso, se  $b = 0 \Rightarrow z = a$ , logo  $z \in \mathbb{R}$ . No entanto, qualquer número real  $x$  pode ser indicado por  $x + 0i$ . Note, então, que todo número real é complexo. Portanto, o conjunto dos números reais está contido em  $\mathbb{C}$ .

As operações de soma e de multiplicação de números complexos terão as mesmas propriedades que as operações de números reais, como associatividade, comutatividade, elemento neutro, etc.

O elemento neutro da soma é o elemento  $0 + 0i = 0$ . Do mesmo modo, o elemento neutro da multiplicação é  $1 + 0i = 1$

Dados dois números complexos  $a + bi$  e  $c + di$  definimos a soma e a multiplicação, respectivamente, como:

1.  $(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$
2.  $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$ .

A grande vantagem em utilizar os números complexos ao invés dos números reais é que dado um polinômio qualquer com coeficientes complexos, ele sempre tem uma raiz complexa.

## A.1 Teorema Fundamental da Álgebra

O teorema fundamental da álgebra foi originalmente demonstrado pelo Matemático Carl F. Gauss, em sua tese de doutorado, em 1799 (LEONARDO, 2013).

**Teorema A.3.** *Todo polinômio  $p(z) = 0$  de grau  $n$ , com  $n \geq 1$ , admite pelo menos uma raiz complexa.*

Isto é, todo polinômio  $p(x) = 0$  sempre tem raiz em  $\mathbb{C}$ , ou seja, qualquer polinômio  $p(x)$  de grau  $n$ , com  $n \geq 1$ , tem ao menos uma raiz complexa. Portanto, esse teorema é importante para entendermos as relações entre as raízes e a forma fatorada de um polinômio.